6 Paskaita. Atsitiktiniai dydžiai II

6.1 Absoliučiai tolydieji atsitiktiniai dydžiai

Apibrėžimas. *Jei atsitiktinio dydžio (arba atsitiktinio vektoriaus) pasiskirstymo funkcija yra visur tolydi, tai tokį atsitiktinį dydį vadinsime tolydžiuoju. Tolydiems atsitiktiniams dydžiams galioja diskrečiųjų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijos analogas, tik sumos ženklą reikia keisti integralu.*

Apibrėžimas. *Atsitiktinį dydį ξ vadinsime absoliučiai tolydžiu, jei egzistuoja neneigiama integruojama funkcija $p_\xi(s)$, kad*

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(s)ds.$$

Funkciją $p_\xi(s)$ vadinsime atsitiktinio dydžio ξ tankio funkcija. Atsitiktinį vektorių $\xi : \Omega \to \mathcal{R}^m$ vadinsime absoliučiai tolydžiu, jei egzistuoja neneigiama integruojama funkcija $p_\xi(s_1, \ldots, s_m)$, kad

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_m) = \int_{s_1 < x_1, \ldots, s_m < x_m} p_\xi(s_1, \ldots, s_m)ds_1 \ldots ds_m.$$

Funkciją $p_\xi(s_1, \ldots, s_m)$ vadinsime atsitiktinio vektoriaus ξ tankio funkcija. Teisingas toks pasiskirstymo ir tankio funkcias siejantis sąryšis:

$$F'_\xi(x) = p_\xi(x).$$

Taigi žinodami pasiskirstymo funkciją, tankio funkciją galime rasti diferencijuodami. Tolydaus atsitiktinio dydžio tankio funkcija $p(x)$ suteikia galimybę interpretuoti tikimybes, susijusias su atsitiktiniu dydžiu X kaip atitinkamų sričių plotus. Pavyzdžiui, tikimybė $P(a < X < b)$ lygi srities, kuri riboja tiesės $x = a, x = b, y = 0$ ir funkcijos $p(x)$ grafikas plotui (žr. pav.1).

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

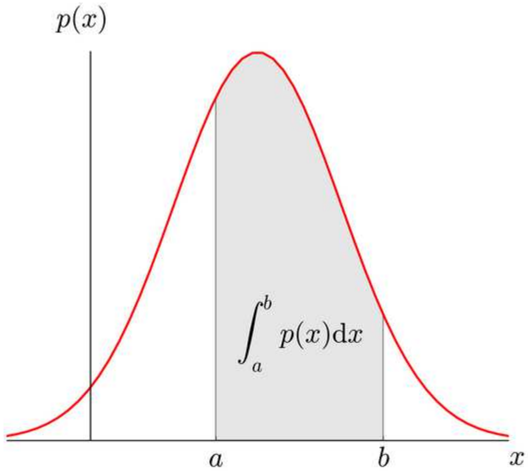
$$= \int_a^b p_X(x)dx.$$

Kai $x \to \infty$, tai $F_X(x) \to 1$. Jei atsitiktinis dydis yra absoliučiai tolydus ir $u \to \infty$, tai

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} p_X(x)dx \to \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx.$$

Taigi funkcijos $p(x)$ grafiku ir koordinačių sistemos ašimi $y = 0$ apribotos srities plotas lygus vienetui, žr. brėžinį.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1.$$



1 pav.: Tikimybės kaip kreivinės trapecijos ploto skaičiavimas.

Tankio reikšmės parodo, kur atsitiktinio dydžio reikšmės linkę dažniau, kur rečiau "pasirodyti". Atsitiktinio dydžio reikšmės dažniau "pasirodo" arti to taško, kuriame tankio reikšmė yra didesnė.

Pavyzdys. Atsitiktinis skritulio taškas

Tarkime, skritulyje, kurio spindulio ilgis $r = 5$, atsitiktinai parenkamas taškas. Tegu X yra pasirinktojo taško atstumas iki centro. Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes iš skaičių intervalo $[0, 5]$. Surasime jo pasiskirstymo funkciją. Kadangi dydis įgyja tik teigiamas reikšmes, tai su $x \leq 0$ gausime $F_X(x) = 0$. Taip pat akivaizdu, kad su $x \geq 5$ teisinga lygybė $F_X(x) = 1$. Kai $0 < x < 5$, gauname $F_X(x) = \pi x^2/\pi 5^2 = x^2/25$. Taigi

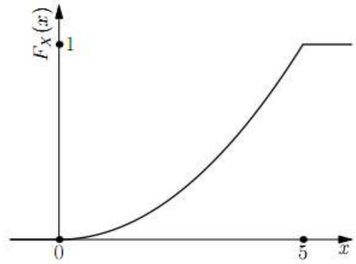
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq 0, \\ x^2/25, & \text{kai } 0 < x \leq 5, \\ 1, & \text{kai } x > 5. \end{cases}$$

Atitinkama tankio funkcija yra

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \notin [0, 5], \\ 2x/25, & \text{kai } x \in [0, 5]. \end{cases}$$

Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcijos $F_X(x)$ grafikas pavaizduotas pav. 2.

O dabar tarkime, kad parinkę skritulio tašką ir išmatavę jo atstumą iki centro, apvaliname atstumą iki sveikojo skaičiaus. Šitaip gausime atsitiktinį dydį Y, kuris gali įgyti šešias reikšmes $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Nesunku apskaičiuoti šių



2 pav.: Pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$.

reikšmių įgyjimo tikimybes:

$$\begin{aligned}
P(Y=0) &= P(X<0,5) = \frac{0,5^2}{5^2} = 0,01,\\
P(Y=1) &= P(0,5<X<1,5) = \frac{1,5^2-0,5^2}{5^2} = 0,08,\\
P(Y=2) &= P(1,5<X<2,5) = \frac{2,5^2-1,5^2}{5^2} = 0,16,\\
P(Y=3) &= P(2,5<X<3,5) = \frac{3,5^2-2,5^2}{5^2} = 0,24,\\
P(Y=4) &= P(3,5<X<4,5) = \frac{4,5^2-3,5^2}{5^2} = 0,32,\\
P(Y=5) &= P(5<X<4,5) = \frac{5^2-4,5^2}{5^2} = 0,16.
\end{aligned}$$

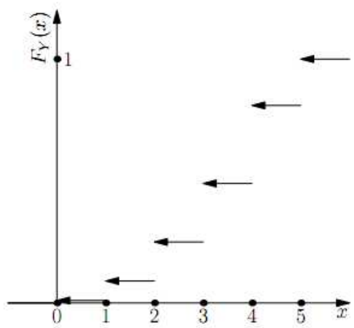
Surašykime jas į lentelę:

Y	0	1	2	3	4	5
$P(Y=y)$	0,01	0,08	0,16	0,24	0,32	0,19

Tuomet pasiskirstymo funkcija:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le 0,\\ 0,01, & \text{kai } 0 < x \le 1,\\ 0,09, & \text{kai } 1 < x \le 2,\\ 0,25, & \text{kai } 2 < x \le 3,\\ 0,49, & \text{kai } 3 < x \le 4,\\ 0,81, & \text{kai } 4 < x \le 5,\\ 1, & \text{kai } x > 5. \end{cases}$$

Pav. 3 pavaizduotas pasiskirstymo funkcijos $F_Y(x)$ grafikas sudarytas iš "laiptelių".



3 pav.: Pasiskirstymo funkcija $F_Y(x)$.

Svarbiausių skirstinių apžvalga

6.2 Diskretieji atsitiktiniai dydžiai

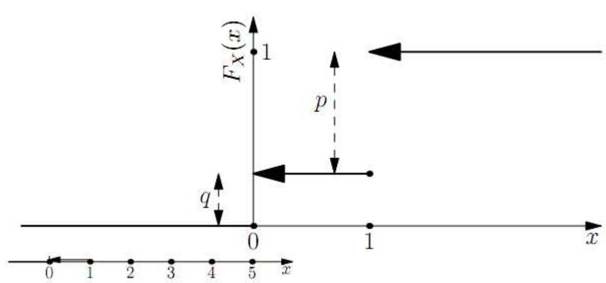
Jau kalbėjome apie išsigimusį atsitiktinį dydį, įgyjantį tik vieną reikšmę. Praktiškai dažniausiai naudojami yra Bernulio, Binominis, geometrinis, Puasono, hipergeometrinis atsitiktiniai dydžiai.

Pavyzdys. Bernulio atsitiktinis dydis

Bernulio schemos bandymuose galimos tik dvi baigtys: nesėkmė ir sėkmė. Jeigu nesėkmės atveją žymėsime skaičiumi 0; o sėkmės – 1, gausime atsitiktinį dydį X, įgyjantį tik dvi reikšmes:

$$P(X=1)=p, P(X=0)=q, 0<p<1, q=1-p.$$

Tokio dydžio pasiskirstymo funkcijos grafikas turi du trūkius, kurių dydžiai lygūs reikšmių tikimybėms p ir q.



4 pav.: Bernulio a.d. pasiskirstymo funkcija $F_X(x)$.

Pavyzdys. Binominis atsitiktinis dydis

Nagrinėkime atsitiktinį dydį X, kurio reikšmė lygi sėkmių skaičiui Bernulio schemoje, kai sėkmės tikimybė viename bandyme lygi p, o bandymų skaičius –

n. Toks dydis gali įgyti reikšmes $0, 1, 2, \ldots n$. Žinome šio dydžio tikimybes:

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Tokio dydžio pasiskirstymo funkcijos grafikas turi $n+1$ trūkį. Binominį atsitiktinį dydį žymėsime $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Šį dydį galima išreikšti dydžių, įgyjančių tik dvi reikšmes, suma. Iš tikrųjų, su i-uoju Bernulio schemos bandymu ($i = 1, 2, \ldots, n$) susiekime atsitiktinį dydį taip:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } i\text{-ajame bandyme sėkmė,} \\ 0, & \text{jei } i\text{-ajame bandyme nesėkmė.} \end{cases}$$

Tada

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

t.y. binominis atsitiktinis dydis $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ yra n vienodai pasiskirsčiusių (su ta pačia sėkmės tikimybe p) Bernulio atsitiktinių dydžių suma.

Pavyzdys. Geometrinis atsitiktinis dydis

Nagrinėkime Bernulio schemą, kurioje bandymus kartojame tol, kol sulauksime pirmos sėkmės Atsitiktinis dydis X yra bandymų skaičius iki pirmos sėkmės. Dydžio reikšmių aibę sudaro visi sveiki neneigiami skaičiai $1, 2, \ldots$. Reikšmių tikimybės sudaro geometrinę progresiją, todėl dydis ir vadinamas geometriniu. Šio dydžio tikimybės:

$$P(X = m) = q^{m-1}p, m = 1, 2, \ldots, 0 < p < 1, q = 1 - p.$$

Žymėsime $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Pavyzdys. Hipergeometrinis atsitiktinis dydis

Tegu urnoje yra u baltų ir v juodų rutulių. Atsitiktinai su grąžinimu traukiame n rutulių, X – baltų rutulių skaičius tarp ištrauktųjų. Nesunku suvokti, kad X yra binominis dydis: $X \sim \mathcal{B}(n, u/(u + v))$. O jeigu ištrauktųjų rutulių nebegrąžintume atgal? Didžiausia galima tokio dydžio reikšmė yra $\max(u, n)$ (negalime ištraukti daugiau baltų rutulių negu traukiame arba negu baltų urnos rutulių skaičius). Mažiausioji – $\max(n - v, 0)$ (jeigu traukiame daugiau rutulių negu urnoje yra juodų, tai $n - v$ baltų rutulių tikrai ištrauksime. Dydis X – diskretusis atsitiktinis dydis, jo reikšmių tikimybės

$$P(X = m) = \frac{C_u^m C_v^{n-m}}{C_{u+v}^n}, \max(n - v, 0) \le m \le \max(u, n).$$

Žymėsime $X \sim \mathcal{H}(u, v, n)$.

Pavyzdys. Puasono atsitiktinis dydis

Ir dar kartą sugrįžkime prie Bernulio schemos. Kai sėkmės tikimybė viename bandyme yra maža, o bandymų skaičius didelis, tai sėkmių skaičiaus tikimybę galime skaičiuoti pagal apytikslę formulę (žr. Puasono teoremą žemiau).

Teorema. Puasono teorema. *Tegu atliekama n Bernulio schemos su sėkmės tikimybėmis p_n bandymų. Tegu ξ_n – sėkmių skaičius šioje bandymų serijoje.*

Jeigu egzistuoja teigiamas skaičius λ, kad $np_n \to \lambda$, kai $n \to \infty$, tai su kiekvienu $m = 0, 1, 2 \ldots$, egzistuoja riba

$$P(\xi_n = m) = C_n^m p_n^m q_n^{n-m} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}. \qquad (1)$$

čia $q_n = 1 - p_n$.

Įrodymas. Pažymėkime $np_n = \lambda_n$ ir pasinaudokime formule $C_n^m = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$:

$$P(\xi_n = m) = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-m}$$

$$= \frac{\lambda_n^m}{m!}\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-m}.$$

Kai $n \to \infty, \lambda_n \to \lambda$, atitinkamai $\lambda_n^m \to \lambda^m$, iš ribų teorijos gauname

$$\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \to e^{-\lambda},$$

o visi kiti daugikliai artėja prie vieneto. Įrodymas baigtas.

Tai reiškia kad binominis dydis "supanašėja" su kitos šeimos dydžiu. Jeigu atsitiktinis dydis X įgyja sveikas neneigiamas reikšmes su tikimybėmis

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \lambda > 0, m = 0, 1, 2, \ldots,$$

tai jį vadinsime Puasono dydžiu ir žymėsime $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

6.3 Ribinės teoremos Bernulio schemoje I

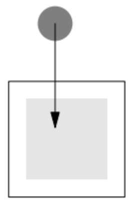
Tiksli Bernulio schemos sėkmių skaičiaus tikimybės formulė kartais nėra labai patogi skaičiavimams. Panagrinėkime pavyzdį.

Pavyzdys. Maži lašeliai, stambus tinklas

Įsivaizduokime srautą iš $n = 1000$ lašelių, krintantį į tinklą, sudarytą iš $1m \times 1m$ dydžio kvadratų. Lašelis – rutuliuko su spinduliu $r = 0,1$ cm formos. Jeigu lašelis kliudo kvadrato kraštinę, jis subyra. Kokia tikimybė, kad subyrės lygiai $m = 5$ lašeliai iš 1000? Vienas lašelis – vienas Bernulio schemos bandymas. Galima įsivaizduoti šį bandymą taip: lašelis krinta į vieno kvadrato plokštumą taip, kad lašelio centras pataiko į kvadrato vidų arba ant kraštinės.

Lašelis nesubyrės, jeigu jo centras pataikys į kvadrato tašką, kurio atstumas nuo bet kurios kvadrato kraštinės didesnis už r. Taigi lašelis nesubyrės, jeigu jo centras pataikys į brėžinyje pilkai nudažytą sritį. Pažymėję p tikimybę, kad vienas lašelis nesubyrės, o q kad subyrės, gausime:

$$q = \frac{(100 - 2r)^2}{100^2} = 0,998^2 = 0,996004, \quad p = 1 - q = 0,003996.$$



5 pav.: Lašelis, kurio centras bus pilkame kvadrate, nesubyrės.

Taigi pritaikę binominės tikimybės formulę gautume

$$P(S_{1000} = 5) = C_{1000}^{5} \cdot 0,003996^{5} \cdot 0,996004^{995}.$$

Žinoma, pasinaudoję kompiuteriu apskaičiuosime ir tokio reiškinio reikšmę. Tačiau, tai nėra patogu. Pasinaudokime (1) formule apytiksliam šios tikimybės skaičiavimui:

$$\lambda = np = 3,996, \quad P(S_{1000} = 5) \approx \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda} \approx 0,15614.$$

Kokia gi yra paklaida? Įrodyta, kad paklaida neviršija np^2. Taigi galime būti tikri, kad paklaida nėra didesnė už $np^2 \approx 0,02$. Iš tikrųjų, kompiuteriu apskaičiavę šią tikimybę pagal Bernulio formulę gautume

$$P(S_{1000} = 5) \approx 0,15645.$$

Taigi paklaida yra tik $0,0003$.