5 Paskaita. Atsitiktiniai dydžiai

5.1 Paprastieji atsitiktiniai dydžiai

Tarkime mėtome lošimo kauliuką. Įvykus baigtims w_1, w_2, w_3, šioms baigtims priskiriame skaičių -1, likusioms baigtims – skaičių 1. Taigi apibrėžėme funkciją iš baigčių aibės į reikšmių aibę $X : \Omega \to \{-1; 1\}$. Funkcijos reikšmės paaiškėja tik atlikus atsitiktinį eksperimentą, todėl natūralu šią funkciją laikyti atsitiktiniu dydžiu. Pirmavaizdžiai $X^{-1}(-1) = \{w_1, w_2, w_3\}, X^{-1}(1) = \{w_4, w_5, w_6\}$ yra atsitiktiniai įvykiai. Toks atsitiktinis dydis įgyja reikšmes -1 ir 1 su tikimybėmis

$$P(X = -1) = P(X = 1) = 1/2.$$

Toks atsitiktinis dydis iliustruoja taip vadinamus paprastuosius atsitiktinius dydžius.

Apibrėžimas. *Funkcija $\xi : \Omega \to \mathcal{R}$ vadinama paprastu atsitiktiniu dydžiu, jei ξ įgyja reikšmes iš baigtinės aibės ir kiekvienai reikšmei x jos pirmavaizdis priklauso $\sigma-$algebrai $\mathcal{A}$*

$$\xi^{-1}(x) = \{w : \xi(w) = x\} \in \mathcal{A}$$

Pavyzdys. Jei $A \in \mathcal{R}$ yra Borelio aibė, tai šios aibės indikatorius, funkcija $I : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ apibrėžta tokiu būdu:

$$I_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{jei } w \in A, \\ 0, & \text{jei } w \notin A, \end{cases}$$

yra paprastas atsitiktinis dydis. Vėliau įsitikinsime, kad $I_A(w)$ yra Borelio funkcija, nes jos pirmavaizdžiai yra Borelio $\sigma-$algebros aibės.

Nagrinėkime mačią erdvę $(\Omega, \mathcal{A})$ ir jos skaidinį $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$. Tarkime, kad aibės $A_i \in \mathcal{A}$ visiems i ir $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$. Jei ξ yra atsitiktinis dydis, x_i – jo reikšmės, $A_i = \xi^{-1}(x_i)$ yra atsitiktiniai įvykiai. Tada

$$\xi(w) = \sum_i x_i I_{A_i}(w). \tag{1}$$

Netrukus pamatysime, kas ξ yra paprastas atsitiktinis dydis. Taigi kiekvieną paprastą atsitiktinį dydį galima išreikšti dar paprastesniais – atsitiktinių įvykių indikatoriais. Indikatorius galime interpretuoti kaip signalus, kurie nurodo, ar įvykis įvyko, ar neįvyko.

Teiginys. Jei ξ, η yra paprasti atsitiktiniai dydžiai, a, b – realūs skaičiai, tai $\zeta = a\xi + b\eta$ yra taip pat paprastas atsitiktinis dydis.

Šis teiginys yra teisingas ir bendruoju atveju: baigtinio skaičiaus paprastų atsitiktinių dydžių tiesinė kombinacija yra paprastas atsitiktinis dydis. Taigi ξ lygtyje (1) yra paprastas atsitiktinis dydis.

5.2 Atsitiktinio dydžio sąvoka

Nagrinėjant tikrovėje vykstančius bandymus, kartais būna sudėtinga nusakyti baigtis, tačiau lengva – tam tikras tų baigčių charakteristikas. Pavyzdžiui, sunku nusakyti, kokia baigtis lėmė, kad šiandien šalta, tačiau išmatuoti temperatūrą galime. Dažnai mums ne tiek rūpi pati bandymo baigtis, kiek tam tikra skaitinė jos charakteristika. Pavyzdžiui, loterijos dalyviui svarbus laimėjimo dydis, besiruošiančiam išeiti iš namų – oro temperatūra ir t. t. Prieš bandymą tokių dydžių reikšmių neįspėsi, taigi tai – atsitiktiniai dydžiai.

Pavyzdys. Atsitiktinis skritulio taškas.
Tarkime, skritulyje, kurio spindulio ilgis $r = 5$, atsitiktinai parenkamas taškas. Tegu X yra pasirinktojo taško atstumas iki centro. Kadangi X reikšmės iš anksto nuspėti negalime, tai X – atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes iš skaičių intervalo $[0; 5]$. Jeigu matuosime atstumą iki centro ir apvalinsime iki sveikojo skaičiaus, gausime dydį Y, įgyjantį reikšmes iš skaičių aibės $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Akivaizdu, kad

$$P(X < 3) = \frac{\pi \cdot 3^2}{\pi \cdot 5^2} = 0,36, \qquad P(Y < 3) = \frac{\pi \cdot 3,5^2}{\pi \cdot 5^2} = 0,49,$$

$$P(X = 3) = 0, \qquad P(Y = 3) = \frac{\pi \cdot (3,5^2 - 2,5^2)}{\pi \cdot 5^2} = 0,24.$$

Tikimybė $P(X < x)$ bus apibrėžta tada ir tik tada, kai baigčių aibė $\{w : X(w) < x\}$ priklausys pasirinktai įvykių $\sigma-$algebrai $\mathcal{A}$. Taigi atsitiktinis dydis yra funkcija, kuri yra "suderinta" su mūsų įvykių $\sigma-$algebra $\mathcal{A}$. Jeigu šios sąlygos nebūtų, ne visų įvykių, susijusių su dydžiu X, tikimybes galėtume apskaičiuoti.

Tegu $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ yra tikimybinė erdvė. Jau anksčiau apibrėžėme paprastuosius atsitiktinius dydžius. Tai funkcijos $\xi : \Omega \to \mathcal{R}$, kurių reikšmių aibė baigtinė, o kiekvienai reikšmei x jos pirmavaizdis priklauso $\mathcal{A}$: $\xi^{-1}(x) \in \mathcal{A}$. Apibendrinsime šią sąvoką.

Apibrėžimas. *Funkcija $\xi : \Omega \to \mathcal{R}$ vadinama atsitiktiniu dydžiu, jei su kiekviena Borelio aibe $B \in \mathcal{B}$*

$$\{w : \xi(w) \in \mathcal{B}\} = \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

Taigi jei ξ yra atsitiktinis dydis, tai galima skaičiuoti, pavyzdžiui, tokias tikimybes:

$$P(a < \xi(w) < b), \quad P(\xi(w) \geq b), \quad P(\xi(w) \text{ yra racionalus skaičius})$$

ir t.t. Jei $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ yra atsitiktinis vektorius, tai kiekviena jo komponentė yra atsitiktinis dydis. Kadangi Borelio aibių yra be galo daug, tai neįmanoma tiesiogiai patikrinti sąlygos (2). Tačiau pakanka ją patikrinti poaibių sistemai, kuri generuoja Borelio aibių sistemą.

Teiginys. Tegu $\mathcal{S}$ – aibės $\mathcal{R}$ poaibių sistema ir $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$. Funkcija $\xi : \Omega \to \mathcal{R}$ yra atsitiktinis dydis tada ir tik tada, kai su kiekviena aibe $B \in \mathcal{S}$ teisingas sąryšis $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Priminsime, kad Borelio $\sigma-$algebrą generuoja intervalai $[a, b)$, tačiau pakanka imti intervalus $(-\infty, b)$. Iš suformuluoto teiginio išplaukia, kad norėdami patikrinti, ar ξ yra atsitiktinis dydis, galime apsiriboti sąlygos (2) tikrinimu aibėms $B = (-\infty, x), x \in \mathcal{R}$.

Pavyzdys. Fiksuokime Borelio aibę $A \in \mathcal{R}$. Funkcija $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ apibrėžta tokiu būdu: $f(x) = 1$, kai $x \in A$ ir $f(x) = 0$, kai $x \notin A$, vadinama aibės A indikatoriumi. Patikrinkime, ar funkcija–indikatorius yra Borelio funkcija.

Bet kuriai aibei $B \in \mathcal{B}$ teisingi teiginiai: jei $\{0; 1\} \in B$, tai $f^{-1}(B) = \mathcal{R}$; jei $\{0; 1\} \cap B = \emptyset$, tai $f^{-1}(B) = \emptyset$; jei $\{0; 1\} \cap B = \{0\}$, tai $f^{-1}(B) = \overline{A}$; jei $\{0; 1\} \cap B = \{1\}$, tai $f^{-1}(B) = A$. Kadangi aibės $\emptyset, A, \overline{A}, \mathcal{R}$ yra Borelio aibės, gavome, kad $f^{-1}(B)$ yra Borelio aibė bet kuriai Borelio aibei B. Taigi f yra Borelio funkcija.

Borelio funkciją galime apibrėžti atsitiktiniams vektoriams.

Apibrėžimas. *Funkcija $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ vadinama Borelio funkcija, jei su kiekviena Borelio aibe $B \in \mathcal{B}^m$*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n. \tag{3}$$

Tikrinti (3) sąlygą nebūtina kiekvienai Borelio aibei $\mathcal{B}^m$, pakanka ją patikrinti intervalų sistemai

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, b_1) \times \ldots \times (-\infty, b_m), b_i \in \mathcal{R}\},$$

nes ši intervalų sistema generuoja Borelio $\sigma-$algebrą $\mathcal{B}^m = \sigma(S)$.

Toliau atsakysime į klausimą: atlikę kokius veiksmus su atsitiktiniais dydžiais vėl gausime atsitiktinius dydžius? Pasirodo, kad tai algebriniai veiksmai – sudėtis, atimtis, daugyba ir dalyba), taip pat analizės operacijos – ribos, maksimumai, minimumai.

Teorema. *Tegu $\xi : \Omega \to \mathcal{R}^n$ yra atsitiktinis vektorius, o $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$ – Borelio funkcija. Tada $\eta = f(\xi)$ yra taip pat atsitiktinis vektorius.*

Išvada. Jei $\xi : \Omega \to \mathcal{R}$ yra atsitiktinis dydis, o c yra konstanta, tai $\xi + c, c\xi, |\xi|, \xi^2$ taip pat yra atsitiktiniai dydžiai.

Teorema. *Tegu $\xi, \eta : \Omega \to \mathcal{R}$ yra atsitiktiniai dydžiai. Tada $\xi \pm \eta, \xi \cdot \eta, \xi/\eta(\eta \neq 0)$ yra taip pat atsitiktiniai dydžiai.*

Prisiminsime, kad skaičių sekos x_n apatinė riba $\lim_n \inf x_n$ yra mažiausias sekos ribinis taškas, o viršutinė riba $\lim_n \sup x_n$ yra didžiausias sekos ribinis taškas.

Teorema. *Tegu $\xi_n : \Omega \to \mathcal{R}, n = 1, 2, \ldots$ yra atsitiktiniai dydžiai, Tada funkcijos*

$$\inf_n \xi_n, \quad \sup_n \xi_n, \quad \lim_n \inf \xi_n, \quad \lim_n \sup \xi_n$$

yra taip pat atsitiktiniai dydžiai. Jei seka ξ_n konverguoja, tai jos riba $\lim_n \xi_n$ yra atsitiktinis dydis.

5.3 Atsitiktinių dydžių skirstiniai

Kiek šio skyriaus eilučių nepatingėsite perskaityti? Eilučių skaičius – diskretusis atsitiktinis dydis. O kiek laiko sugaišite skaitymui? Tai – tolydusis atsitiktinis *dydis.*

Nagrinėkime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, taip pat atsitiktinius dydžius $\xi : \Omega \to \mathcal{R}$ bei atsitiktinius vektorius $\xi : \Omega \to \mathcal{R}^m$.

Apibrėžimas. *Tegu $\xi : \Omega \to \mathcal{R}^m$ – atsitiktinis vektorius, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$. Jo pasiskirstymo funkcija vadinsime funkciją $F_\xi : \mathcal{R}^m \to [0,1]$, apibrėžiamą taip:*

$$F_\xi(x_1, \dots, x_m) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_m < x_m). \tag{4}$$

Jei $m = 1$, tai ξ yra atsitiktinis dydis, o $F_\xi(x)$ – vieno kintamojo funkcija $F_\xi(x) = P(\xi < x)$. Pasinaudodami pasiskirstymo funkcija galime skaičiuoti ir kitas tikimybes, pavyzdžiui,

$$P(a \leq \xi < b) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = F_\xi(b) - F_\xi(a),$$
$$P(\xi \geq a) = 1 - P(\xi < a) = 1 - F_\xi(a).$$

Pateiksime pagrindines pasiskirstymo funkcijos savybes.

Teorema. *Atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija turi šias savybes:*

1. *$F_\xi(x)$ yra nemažėjanti funkcija;*
2. *$F_\xi(x)$ yra tolydi iš kairės;*
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1.$

Įrodymas. Pažymėkime pirmavaizdžių aibes $A_x = \{w : \xi(w) < x\}$. Tada $F_\xi(x) = P(A_x)$.

1. jei $x_1 < x_2$, tai $A_{x_1} \subset A_{x_2}$. Tada $P(A_{x_1}) \leq P(A_{x_2})$, t.y. $F_\xi(x)$ yra nemažėjanti funkcija;
2. jei $x_1 < x_2 < \dots < x, \lim_{n\to\infty} x_n = x$, tai $A_{x_1} \subset A_{x_2} \subset \dots$ ir $\cup_n A_{x_n} = A_x$. Pasinaudoję teorema apie tikimybių monotoniškumą, gausime

   $$\lim_n P(A_{x_n}) = P(A_x), \quad \text{arba} \quad \lim_n F_\xi(x_n) = F_\xi(x);$$

   T.y. atsitiktinis dydis yra tolydi iš kairės funkcija.
3. tegu $x_1 < x_2 < \dots, \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Tada $\cup_n A_{x_n} = \Omega$. Pasinaudoję tikimybių monotoniškumu ir $P(\Omega) = 1$, gausime teoremos teiginį;
   tegu $x_1 > x_2 > \dots, \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Tada $\cap_n A_{x_n} = \emptyset$. Teoremos teiginį taip pat gauname iš tikimybių monotoniškumo ir $P(\emptyset) = 0$.

Funkcija F_ξ turi visas savybes, kurių reikia tikimybiniam matui $P_F : \mathcal{B} \to [0; 1]$ konstruoti. Šį matą žymėsime P_ξ ir vadinsime *atsitiktinio dydžio skirstiniu.*

Apibrėžimas. *Jei atsitiktinio dydžio (arba atsitiktinio vektoriaus) reikšmių aibė yra baigtinė arba skaiti, tai tokį atsitiktinį dydį vadinsime diskrečiuoju.* Pavyzdžiui, paprastieji atsitiktiniai dydžiai yra diskretieji.

Tegu ξ yra diskretusis atsitiktinis dydis. Tada jo įgyjamas reikšmes galima sunumeruoti. Šiuos numerius pažymėkime $s_i, i \in I$, čia I yra baigtinė arba begalinė, bet skaiti numerių aibė. Kadangi įvykiai $\{w : \xi(w) = s_i\}$ yra nesutaikomi, o jų sąjunga sudaro Ω,

$$\sum_{i \in I} P(\xi(w) = s_i) = 1.$$

Be to,

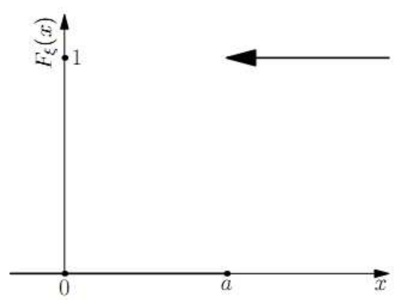
$$F_\xi(x) = \sum_{i \in I, s_i < x} P(\xi(w) = s_i). \tag{5}$$

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija turi trūkius taškuose s_i, o šuolių dydžiai šiuose taškuose yra $P(\xi(w) = s_i)$.

Pavyzdys. Išsigimęs atsitiktinis dydis ir jo skirstinys.
Jei atsitiktinis dydis įgyja vienintelę reikšmę, t.y. yra toks skaičius a, kad $P(\xi = a) = 1$, tai tokį atsitiktinį dydį vadinsime išsigimusiu. Jo pasiskirstymo funkcija

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq a, \\ 1, & \text{kai } x > a. \end{cases}$$

Iš esmės šis dydis nėra atsitiktinis. Paveiksle 1 pavaizduota šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. Ji turi vienintelį trūkį taške $x = a$.



1 pav.: Išsigimusio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

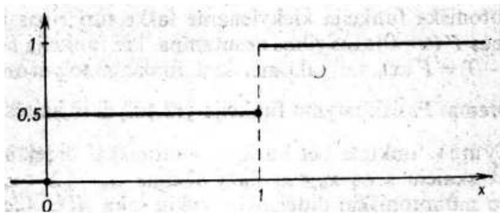
Pavyzdys. Metame simetrišką monetą. Pažymėkime ξ herbo atvirtimų skaičių. Šiam eksperimentui imkime tikimybinę erdvę, kurios elementariųjų įvykių aibė yra $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, atsitiktinių įvykių $\sigma-$algebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_0\}, \{\omega_1\}, \Omega\}$, o tikimybinis matas aprašytas lygybėmis $P(\{\omega_0\}) = P(\{\omega_1\}) = 1/2$. Dydį ξ apibrėžkime taip:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai } \omega = \omega_1, \\ 0, & \text{kai } \omega = \omega_0. \end{cases}$$

Kadangi $\mathcal{A}$ sudaryta iš visų Ω poaibių, visų Borelio aibių pirmavaizdžiai priklausys $\mathcal{A}$, todėl ξ yra atsitiktinis dydis. Jo pasiskirstymo funkcija

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq 0, \\ 1/2, & \text{kai } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{kai } x > 1. \end{cases}$$

Paveiksle 2 pavaizduota šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. Ji turi trūkius taškuose $x = 0$ ir $x = 1$ ir šuolių dydžiai yra $1/2$.



2 pav.: Atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Teorema. *Daugiamačio atsitiktinio dydžio* $X = (X_1, \ldots, X_m)$ *pasiskirstymo funkcija* $F_X(x_1, \ldots, x_m)$ *turi šias savybes:*

1. *kiekvienam* $k, 1 \leq k \leq m$ $F_X(x_1, \ldots, x_m) \to 0$, *kai* $x_k \to -\infty$;
2. *pasiskirstymo funkcija yra nemažėjanti kiekvieno argumento atžvilgiu;*
3. $F_X(x_1, \ldots, x_m) \to 1$, *kai* $x_1 \to \infty, \ldots, x_m \to \infty$;
4. F_X *yra tolydi iš kairės kiekvieno argumento atžvilgiu;*
5. *kiekvienam* $k, 1 \leq k \leq m, k \geq 2$, $F_{X_1,\ldots,X_{k-1},X_k,X_{k+1},\ldots,X_m}(x_1, \ldots, x_{k-1}, \infty, x_{k+1}, \ldots, x_m)$ *yra atsitiktinio dydžio* $(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_m)$ *pasiskirstymo funkcija, ji vadinama atsitiktinio vektoriaus* $(X_1, \ldots, X_m)$ *marginaliąja pasiskirstymo funkcija.*