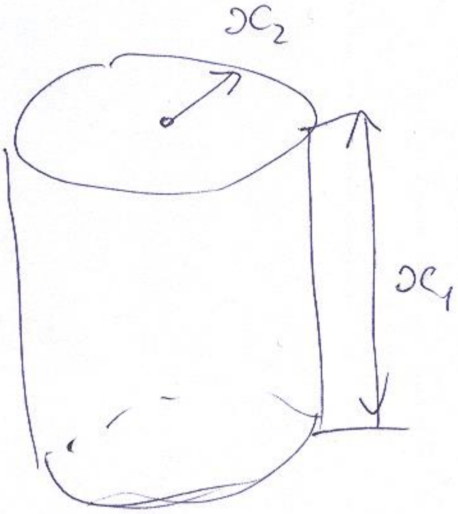
Pratybos (Paskaita 5)

Rasti parametrus cilindrinės cisternos, kurios plotas yra S_0, o tūris yra maksimalus



Paviršiaus plotas

$$S = 2\pi x_2^2 + 2\pi x_2 x_1$$

~~Paviršiaus~~ Cisternos tūris

$$V = \pi x_2^2 x_1$$

Minimizavimo uždavinys

$$\begin{cases} f(x) = -\pi x_1 x_2^2, \quad x = (x_1, x_2) \\ g(x) = 2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_2^2 - S_0. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \to \min \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$$

Sudarome Lagranžo f-ją

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

Ieškome stacionarių taškų

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} := \boxed{-\pi x_2^2 + \lambda 2\pi x_2 = 0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} := \boxed{-2\pi x_1 x_2 + \lambda 2\pi (x_1 + 2x_2) = 0}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} := \boxed{2\pi x_1 x_2 + 2\pi x_2^2 - S_0 = 0}$$

$$\boxed{x_2 = 2\lambda}$$

$$-2\lambda x_1 + \lambda (x_1 + 4\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 4\lambda}$$

$$16\pi\lambda^2 + 8\pi\lambda^2 = S_0$$

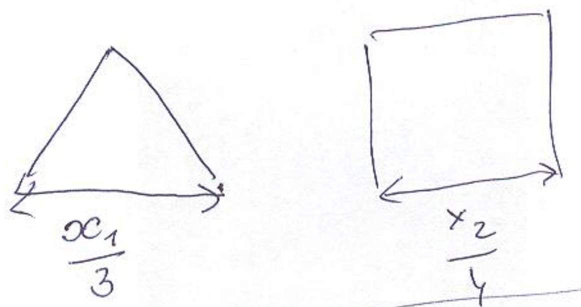
$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \pm\sqrt{\frac{S_0}{24\pi}}}$$

Galima patikrinti, kad tai lokalaus minimumo taškas

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{S_0}{6\pi}}$$

Pav. 2 Turime vielos gabalą, kurio ilgis l.

Reikia išlankstyti lygiakraštį trikampį ir kvadratą tokius, kad jų bendras plotas būtų didžiausias



$$g(x_1, x_2) = \boxed{x_1 + x_2 - l \quad (=0)}$$

$$S(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{36} x_1^2 + \frac{1}{16} x_2^2$$

$$f(x_1, x_2) = -S(x_1, x_2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \to \min \\ g(x) = 0. \end{array}}$$

Pastaba. Palyginkite konstantas $\frac{\sqrt{3}}{36}$ ir $\frac{1}{16}$, prisiminkite diskrečiosios kuprinės uždavinį. Kokias išvadas galite padaryti?

Spręskime minimizavimo uždavinį naudodami Lagranžo daugiklių metodą.

$$F(x) = f(x) + \lambda\, g(x), \quad x = (x_1, x_2)$$

Ieškokime stacionaraus taško:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} := -\dfrac{\sqrt{3}}{18} x_1 + 1 \cdot \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x_2} := -\dfrac{1}{8} x_2 + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} := x_1 + x_2 - l = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{18}{\sqrt{3}}\lambda \quad , \quad x_2 = 8\lambda$$

$$\left(\frac{18}{\sqrt{3}} + 8\right)\lambda = l$$

$$(6\sqrt{3} + 8)\lambda = l \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{l}{6\sqrt{3}+8}}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1^0 = \dfrac{6\sqrt{3}\, l}{6\sqrt{3}+8} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+4}\, l. \\[2ex] x_2^0 = \dfrac{4l}{3\sqrt{3}+4}. \end{array}\right.$$

Nesuenku patikrinti (būtinosios sąlygos), kad stacionarusis taškas (x_1^0, x_2^0) yra maksimumo taškas (arba $S(x)$ minimumo taškas)

O mums reikia rasti $S(x)$ maksimumo tašką ($-S(x)$ minimumą!)

Kadangi yra akivaizdu iš fizikinių samprotavimų (praktinės logikos) kad visgi $S(x)$ maksimumo ~~taško~~ turi egzistuoti, tai panagrinėkime kokių sąlygų dar neįvertinome. Iš pirmiausia turime įvykdyti reikalavimus

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Taigi apribojimus gauname kaip nelygybes, o ~~tokio~~ atvejo dar nenagrinėjome.