8 Simplekso metodas

8.1 Tiesinės funkcijos ekstremumas iškilojoje aibėje

8.1 Apibrėžimas. Erdvės R^n poaibis G vadinamas iškiląja aibe, jei pasirinkus bet kuriuos du tos aibės elementus x' ir x'' ir realųjį skaičių $t \in [0,1]$, elementas $tx' + (1-t)x''$ taip pat priklauso aibei G. Elementai vadinami taškais, o taškų aibė $tx' + (1-t)x'' = [x', x'']$ – atkarpa, jungiančia taškus x' ir x''.

8.1 Teorema. *Suderintos tiesinių lygčių sistemos neneigiamų sprendinių aibė yra iškiloji.*

8.2 Apibrėžimas. Aibės G taškas x_0 vadinamas jos kraštiniu tašku, jei nėra taškų x' ir x'', priklausančių aibei G, su kuriais $x_0 \in (x', x'')$, čia $(x', x'') = tx' + (1-t)x'', 0 < t < 1$.

Jei aibei G priklauso visi kraštiniai taškai, tai ji vadinama uždara aibe.

8.2 Teorema. *Suderintos tiesinių lygčių sistemos neneigiamų sprendinių aibė yra uždara.*

8.3 Apibrėžimas. Iškilosios aibės G elementas vadinamas tos aibės ekstremumo tašku, jei jo negalima užrašyti išraiška $tx' + (1-t)x''$, kurioje $0 < t < 1$, o $x' \neq x'', x', x'' \in G$.

n – matėje Euklido erdvėje R^n elemento $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ilgis $|x| = \sqrt{< x, x >}$ (simboliu $<, >$ pažymėta skaliarinė sandauga).

8.4 Apibrėžimas. Iškiloji aibė G vadinama aprėžta, jei visi jos elementai yra aprėžto ilgio, t. y. $\mid x \mid \leqslant M, \forall x \in G$.

8.3 Teorema. *Aprėžtoje uždaroje iškilojoje aibėje, turinčioje baigtinį ekstremumo taškų skaičių, kiekviena tiesinė funkcija įgyja minimalią reikšmę bent viename ekstremumo taške.*

8.2 Kanoninio tiesinio programavimo uždavinio leistinosios aibės kraštinio taško nustatymas

Nagrinėkime kanoninį tiesinio programavimo uždavinį:

$$min(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n), \text{kai}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & ... & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & ... & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ .... & & ..... & & ... & & ...... & & .... \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & ... & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \\ x_1 \geqslant 0, & & x_2 \geqslant 0, ... & & , x_n \geqslant 0. & & & & \end{array} \right.$$

8.5 Apibrėžimas. Kanoninio tiesinio programavimo uždavinio sprendinių aibė vadinama leistinąja aibe.

8.4 Teorema. *Kanoninio tiesinio programavimo uždavinio leistinosios aibės taškas x_0 yra kraštinis tada ir tik tada, kai jis yra nagrinėjamos tiesinių lygčių sistemos bazinis sprendinys.*

8.5 Teorema. *Jei tiesinio programavimo uždavinio sprendinių aibė nėra tuščia, tai joje yra bent vienas leistinosios aibės kraštinis taškas.*

8.3 Simplekso metodas ir jo taikymo schema kraštinio taško optimalumui nustatyti

Ieškokime tiesinės funkcijos

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

minimumo taško tiesinių lygčių sistemos

$$AX = B$$

neneigiamų sprendinių aibėje. Čia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & s_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

Tarkime, kad matricos A rangas yra lygus jos eilučių skaičiui. Jei duotai sistemai ši prielaida negalioja, tai mes ją galime pakeisti ekvivalenčia tiesinių lygčių sistema, kurios rangas lygus sistemos lygčių skaičiui.

Apribojimų sistemą parašykime vektorine lygtimi:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i = \beta, \quad \text{čia}$$

$$\beta_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ ... \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Jei neneigiamų skaičių rinkinys $(l_1, l_2, ..., l_n)$ yra šios sistemos sprendinys, tai vektorius β yra vektorių $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ tiesinė kombinacija, t. y.

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} l_i\beta_i, \quad l_i \geqslant 0, i = 1, 2, ..., n.$$

Pastaba. Simplekso metodu galima spręsti tik tokius tiesinio programavimo uždavinius, kurių vektorinėje išraiškoje

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} l_i\beta_i, l_i \geqslant 0, i = 1, 2, ..., n$$

tarp koeficientų $l_1, l_2, ..., l_n$ yra ne mažiau kaip m teigiamų koeficientų.

Kaip jau žinome iš tiesinių lygčių sistemų teorijos, tokį reikalavimą tenkina tiesinių lygčių sistemos neneigiami baziniai sprendiniai. Vadinasi, funkcijos minimumo ieškome tiesinių lygčių sistemos bazinių sprendinių aibėje.

8.6 Teorema. *Tiesinių lygčių sistemos $AX = B$, kurios matricos rangas lygus jos eilučių skaičiui ($rangA = m$) ir kuri tenkina pastaboje suformuluotą sąlygą, neneigiamas sprendinys yra jos neneigiamų sprendinių aibės ekstremumo taškas tada ir tik tada, kai jis yra bazinis. Ekstremumų skaičius yra baigtinis.*

Funkcijos minimumo ieškosime leistinosios aibės kraštinių taškų aibėje. Jei patikrintume visus kraštinius taškus ir tarp jų rastume tą (tuos), kuriame (kuriuose) nagrinėjamoji funkcija $f(x)$ įgyja mažiausią reikšmę, turėtume nagrinėjamo tiesinio programavimo uždavinio sprendinį (sprendinius). Praktiniuose skaičiavimuose gali būti taikoma tokia schema:

- pasirenkamas vienas kraštinis taškas,
- sudaroma tikslo funkcijos mažėjimo seka $x_0, x_1, ..., x_k$, kurios paskutinis taškas ir yra optimalus, t. y.
$$f(x_0) > f(x_1) > ... > f(x_k),$$
be to, du gretimi sekos nariai yra tos pačios leistinosios aibės daugiakampio briaunos galai.

Remdamiesi pastaba, visus vektorius β_j ir vektorių β išreikškime per bazinius $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, ..., \beta_{i_m}$:

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{m} q_{i_k j}\beta_{i_k}, j = 1, 2, ..., n, \tag{8.1}$$

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} l_{i_k}\beta_{i_k}. \tag{8.2}$$

Kai $j \in \{i_1, i_2, ..., i_m\}$, galioja lygybės:

$$q_{i_k j} = \begin{cases} 1 & , \quad j = i_k, \\ 0 & , \quad j \neq i_k, \end{cases}, k = 1, 2, ..., m.$$

Visos koordinatės $l_{i_1}, l_{i_2}, ..., l_{i_m}$ yra teigiamos.

Tarkime, kad $x_0 = (l_1^0, l_2^0, ..., l_n^0), l_{i_k}^0 > 0, k = 1, 2, ..., m, l_j^0 = 0, j \notin \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ yra ekstremumo taškas (tiesinių lygčių sistemos leistinosios aibės kraštinis taškas). Reikia rasti kraštinį tašką x_1 tokį, kad $f(x_1) < f(x_0)$. Remdamiesi (8.1) ir (8.2) išraiškomis, gauname:

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{m} q_{i_k j}\beta_{i_k}, j = 1, 2, ..., n,$$

$$\beta = \sum_{k=1}^{m} l_{i_k}^0\beta_{i_k},$$

$$q_{i_k i_k} = 1, q_{i_k i_l} = 0, l \neq k.$$

Pažymime

$$z_j = \sum_{k=1}^{m} c_{i_k} q_{i_k j}, j = 1, 2, ..., n,$$

$$z_0 = f(x_0) = \sum_{k=1}^{m} c_{i_k} l_{i_k}^0.$$

8.7 Teorema. ***Pagrindinė simplekso metodo teorema***

Tarkime, kad $z_0 = f(x_0)$, o x_0 yra kanoninio tiesionio programavimo uždavinio leistinosios aibės kraštinis taškas.

Jei yra toks j^0, kad $c_{j^0} - z_{j^0} < 0$, kai $j^0 \notin \{i_1, i_2, ..., i_m\}$, tai:

1) jei $q_{i_k j^0} \leqslant 0$, tai $min f(x) = -\infty$,

2) jei $q_{i_k j^0} > 0$, tai su bent vienu k egzistuoja toks kraštinis taškas x_1, kad $f(x_1) < f(x_0)$.

Jei su visais $j \notin \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ $\quad c_j - z_j \geqslant 0$, tai $min f(x) = f(x_0)$.

Toliau pateiksime simplekso metodo schemą. Nemažindami bendrumo, laikykime, kad $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_m = m$, o x_0 – leistinosios aibės kraštinis taškas. Tuomet tiesinių lygčių sistemos $AX = B$ kintamieji $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, ..., x_m \geqslant 0$ yra baziniai kintamieji, o kintamieji $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ – laisvieji kintamieji, t. y. $x_{m+1} = x_{m+2} = ... = x_n = 0$. Tada tiesinių lygčių sistemos koeficientų matricą galime suskaidyti į dvi matricas. Matricos G stulpeliai – baziniai vektoriai $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$, o matricos D – vektoriai $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, ..., \beta_n$, o $x_0 = x_G^0 + x_D^0$. Tikslo funkcijos koeficientų vektorių taip pats suskaidome į dvi dalis: $c = c_G + c_D$. Tikslo funkcija yra vektorių c ir x skaliarinė sandauga, t. y. $f(x) = \langle c, x \rangle$. Pradinę tiesinių lygčių sistemą galime perrašyti taip:

$$Gx_G + Dx_D = B.$$

Kai $x_D = 0$, tai

$$Gx_G = B \quad \text{arba} \quad x_G = G^{-1}B.$$

Taigi norėdami patikrinti, ar taške x_0 tikslo funkcija $f(x)$ įgyja minimalią reikšmę, turime išnagrinėti jos kitimą leistinųjų krypčių taškuose, t. y. gretimuose kraštiniuose taškuose, kurie gali būti užrašomi pavidalu $x = x_0 + \lambda s$, čia s – leistinosios krypties vektorius, o $\lambda > 0$. Kadangi x – kraštinis taškas, tai jis turi būti tiesinių lygčių sistemos $AX = B$ bazinis sprendinys, t. y.

$$A(x_0 + \lambda s) = B, \quad \text{o} \quad x_0 + \lambda s \geqslant 0.$$

Kadangi $Ax_0 = B$, tai

$$As = 0.$$

Vadinasi, leistinoji kryptis taške x_0 nustatoma vektoriumi s, kuris yra tiesinių lygčių sistemos $As = 0$ sprendinys. Prisiminę, kad $A = G + D$, $x_0 = x_G^0 + x_D^0$, o $s = s_G + s_D$, sąlygą $x_0 + \lambda s \geqslant 0$ perrašome taip:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_G^0 & + & \lambda s_G & \geqslant & 0, \\ x_D^0 & + & \lambda s_D & \geqslant & 0, \end{array} \right. , \lambda > 0,$$

o tiesinių lygčių sistemą $Gs_G + Ds_D = 0$. Tuomet leistinoji kryptis taške x_0 yra

$$s_G = -G^{-1}Ds_D, \quad s_D \geqslant 0.$$

Norėdami patikrinti, ar kraštinis taškas x_0 yra optimalus, skaičiuojame skaliarines sandaugas $\langle c, x_0 \rangle$ ir $\langle c, x \rangle$, $\quad x = x_0 + \lambda s, \lambda > 0$ ir nagrinėjame skirtumą:

$$\langle c, x \rangle - \langle c, x_0 \rangle = \lambda \langle c, s \rangle.$$

Jei $\langle c, s \rangle > 0$, tai funkcija leistinąja kryptimi didėja; jei $\langle c, s \rangle < 0$ – mažėja; jei $\langle c, s \rangle = 0$ – funkcija yra pastovi.

Taškas bus minimumo taškas tik tuo atveju, jei visomis leistinosiomis kryptimis funkcija didės arba bus pastovi. Ši sąlyga gali būti užrašyta ir tokiu pavidalu:

$$\left\langle c_D - (G^{-1}D)^T c_G, s_D \right\rangle \geqslant 0, s_D \geqslant 0.$$

Jei kraštinis taškas x_0 yra neišsigimęs, t. y. visos jo bazinės koordinatės didesnės už 0, tai jis bus optimalus, jei

$$c_D - (G^{-1}D)^T c_G \geqslant 0.$$

Jei bent viena kraštinio taško bazinė koordinatė lygi 0, tai taškas yra išsigimęs ir turi būti tenkinama anksčiau pateikta sąlyga.

Visą išdėstytą kraštinio taško optimalumo tikrinimo schemą paprasčiau pateikti lentele ([4]):

		c_D	c_{m+1}	...	c_j	...	c_n
G	c_G	x_G^0	A_{m+1}	...	A_j	...	A_n
β_1	c_1	x_1^0	α_{1m+1}	...	α_{1j}	...	α_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
β_i	c_i	x_i^0	α_{im+1}	...	α_{ij}	...	α_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
β_m	c_m	x_m^0	α_{mm+1}	...	α_{mj}	...	α_{mn}
		z_D	z_{m+1}	...	z_j	...	z_n
		Δ_D	Δ_{m+1}	...	Δ_j	...	Δ_n

Lentelėje pažymėta: G – matrica, sudaryta iš matricos A bazinių stulpelių, c_G – tikslo funkcijos koeficientai prie bazinių nežinomųjų, c_D – likę tikslo funkcijos koeficientai, x_G^0-- bazinio sprendinio nenulinės koordinatės, $A_j = G^{-1}\beta_j, j = m+1, ..., n$, vektoriaus z_D koordinatės z_j yra skaliarinės sandaugos $\langle c_D, A_j\rangle, j = m+1, ..., n$, o $\Delta_D = c_D - z_D$.

Tuo atveju, kai taškas x_0 nėra optimalus, t. y. yra tokių $\Delta_j, j \in \{m+1, m+2, ..., n\}$, kad $\Delta_j < 0$, tenka analizuoti kitą kraštinį tašką $x_1 = x_0 + \lambda s$ ir sudaryti simplekso lentelę. Leistinoji kryptis s nustatoma pagal čia pateiktą simplekso lentelę taip:

$$s = \begin{cases} -\alpha_{ij}, & \text{kai} \quad i = 1, ..., i, ..., m, \\ 1, & \text{kai} \quad i = j, \\ 0, & \text{kai} \quad i = m+1, ..., j-1, j+1, ..., n. \end{cases}$$

Tuo atveju, jei visi $\alpha_{ij} \leqslant 0$, tiesinio programavimo uždavinys leistinojoje aibėje neįgyja minimalios reikšmės. Priešingu atveju turime nustatyti dar ir daugiklį $\lambda > 0$. Jis – mažiausias iš santykių $\frac{x_i^0}{\alpha_{ij}}$. Kai leistinoji kryptis s ir daugiklis $\lambda > 0$ jau yra nustatyti, randame tašką x_1 ir tikriname, ar jis yra optimalus.