10 Dinaminiai ekonominiai modeliai aprašomi diferencialinėmis lygtimis

10.1 Diferencialinės lygties pusiausvyros taškai ir jų stabilumas

Laikydami, kad tam tikras nagrinėjamas ekonominis procesas yra diskretusis, taikėme skirtumines lygtis. Dabar laikysime, kad procesai yra tolydieji ir mes apie juos galime ką nors pasakyti bet kuriuo laiko momentu. Tarę, kad žinome tam tikro dydžio x_t kitimo greitį $\dot{x}_t$, turime diferencialinę lygtį:

$$\dot{x}_t = f(t, x_t, a_t).$$

Užrašytoji lygtis yra pirmosios eilės diferencialinė lygtis, kurioje x_t – nežinoma funkcija, o a_t – parametrų rinkinys. Bendrai imant parametrai gali būti ir laiko funkcijos. Mes apsiribosime pirmosios eilės tiesine diferencialine lygtimi

$$\dot{x}_t = ax_t + b,$$

čia a, b – parametrai, nepriklausantys nuo laiko. Suprantama, kad egzistuoja ir aukštesniųjų eilių diferencialinės lygtys. Pavyzdžiui, tiesinė atrosios eilės diferencialinė lygtis gali būti užrašyta taip:

$$\ddot{x}_t = a\dot{x}_t + bx_t + c,$$

čia a, b ir c – parametrai, nepriklausantys nuo laiko.

Grįžkime prie pirmosios eilės tiesinės diferencialinės lygties analizės.

10.1 Apibrėžimas. Taškai, kuriuose pirmosios eilės tiesinės diferencialinės lygties $\dot{x}_t = 0$, yra vadinami pusiausvyros taškais.

Matome, kad pirmosios eilės tiesinės diferencialinės lygties

$$\dot{x}_t = ax_t + b$$

pusiausvyros taškas yra

$$x_t = -\frac{b}{a},\ a \neq 0.$$

Perrašome diferencialinę lygtį taip:

$$\dot{x}_t = a\left(x_t + \frac{b}{a}\right)$$

arba

$$\dot{x}_t = a\left(x_t - x^*\right),$$

čia x^* – pusiausvyros taškas.

Šioje išraiškoje matome, kad x_t kitimo greitis $\dot{x}_t$ priklauso tik nuo konstantos a ženklo.

1. Kai $a < 0$:

   - jei $x_0 > x^*$, tai $\dot{x}_t < 0$,
   - jei $x_0 < x^*$, tai $\dot{x}_t > 0$.

2. Kai $a > 0$:

   - jei $x_0 > x^*$, tai $\dot{x}_t > 0$,
   - jei $x_0 < x^*$, tai $\dot{x}_t < 0$.

Pirmuoju atveju abu judėjimai yra nukreipti į pusiausvyros tašką, todėl šiuo atveju pusiausvyros taškas yra vadinamas stabiliuoju.

Antruoju atveju abu judėjimai yra nukreipti tolyn nuo pusiausvyros taško ir šiuo atveju pusiausvyros taškas yra vadinamas nestabiliuoju.

10.2 Solovo diferencialinė lygtis

Prisiminkime Kobo – Duglaso produkcijos kiekio nustatymo formulę

$$Q = F(K(t), L(t)).$$

Šioje formulėje paklausa (produkcijos kiekis) Q priklauso nuo kapitalo $K(t)$ ir nuo darbo $L(t)$. Tarę, kad produkcijos funkcija:

1) yra du kartus diferencijuojama abiejų kintamųjų (K ir L) atžvilgiu ir $F'_K > 0$, $F'_L > 0$, o $F''_{KK} < 0$ ir $F''_{LL} < 0$,

2) yra homogeninė pirmojo laipsnio funkcija abiejų kintamųjų (K ir L) atžvilgiu, t. y.

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L),$$

o tuomet

$$F(K, L) = \frac{1}{\lambda} F(\lambda K, \lambda L)$$

gauname, kad

$$\lambda Q = F(\lambda K, \lambda L).$$

Gautąją išraišką perrašome taip:

$$\frac{Q}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right).$$

Pažymime $\frac{K}{L} = k$, o $\frac{Q}{L} = q$, $f(k) = F(k, 1)$. Tarę, kad kapitalo ir darbo santykio (k) kitimo greitis kiekvienu laiko momentu yra lygus investicijų ir nuvertėjimo skirtumui, gauname diferencialinę lygtį

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - \delta k,$$

čia $0 < s < 1$ – investicijų koeficientas, o δ – nuvertėjimo koeficientas.

Sudarytoji diferencialinė lygtis vadinama Solovo (amerikiečių ekonomistas Robert Solow) diferencialine lygtimi. Šios diferencialinės lygties pusiausvyros taškas yra nustatomas sprendžiant lygtį

$$sf(k) - \delta k = 0.$$

Prisiminkime Kobo – Duglaso produkcijos funkciją, kurią nagrinėjome analizuodami įmonės veiklą:

$$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \ 0 < \alpha < 1.$$

Šiuo atveju gauname, kad funkcija $f(k) = Ak^{\alpha}$ ir tokiu būdu Solovo diferencialinė lygtis turi pavidalą:

$$\frac{dk}{dt} = sAk^{\alpha} - \delta k.$$

Skaitytojui siūlome nustatyti gautosios diferencialinės lygties pusiausvyros taškus ir ištirti jų stabilumą. Taip pat rekomenduojame atlikti kapitalo ir darbo santykio kitimo greičio funkcijos tyrimą.