8 Antrosios eilės dinaminių sistemų ramybės taškų klasifikacija

Praėjusioje paskaitoje nagrinėjome antrosios eilės dinaminės sistemos sprendinių elgseną atsižvelgdami į vieno parametro įtaką. Pastebėjome, kad tam tikrais atvejais sistemos sprendiniai visą laiką išlieka kurioje nors iš koordinatinių ašių ir taškas trajektorija (ašimi) juda arba į vieną arba į kitą pusę.

Šios paskaitos tikslas – bendro atvejo analizė. T. y. vėl sugrįžtame prie homogeninės autonominės antrosios eilės dinaminės sistemos, kurios koeficientai yra pastovūs:

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy. \end{cases} \tag{8.1}$$

Matricinė tokios dinaminės sistemos forma yra

$$\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X}, \tag{8.2}$$

čia

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}.$$

Norėdami sudaryti bendrojo sprendinio išraišką, kaip ir tiesinių homogeninių diferencialinių lygčių atvejais sprendinio ieškome tam tikroje funkcijų klasėje, t. y. tarp funkcijų, kurių išvestinės konstantų tikslumu sutampa su pačia funkcija. Tokiu būdu mes ieškome (8.1) dinaminės sistemos sprendinių tokiu pavidalu:

$$\overrightarrow{X} = \mathrm{e}^{\lambda t}\overrightarrow{V}, \tag{8.3}$$

čia $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{O}$ – fiksuotas konstantų vektorius, o λ – konstanta, lemianti augimo (gesimo) greitį. Jei tokie sprendiniai egzistuoja, tai būtent jie išreiškia eksponentinį judėjimą ašimis.

Tiek λ, tiek $\overrightarrow{V}$ surandami įrašius sprendinio išraišką (8.3) į (8.2) sistemą. Gauname, kad

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\overrightarrow{V} = A\mathrm{e}^{\lambda t}\overrightarrow{V}$$

arba

$$A\overrightarrow{V} = \lambda\overrightarrow{V}. \tag{8.4}$$

Gautasis uždavinys yra matricos A tikrinių reikšmių λ nustatymo uždavinys. Kai tikrinės reikšmės jau yra nustatytos, tada surandami tikrines reikšmes atitinkantys tikriniai vektoriai $\overrightarrow{V}$.

Kaip žinome iš tiesinės algebros kurso, tikrinių reikšmių nustatymo uždavinys yra ekvivalentus charakteringosios lygties

$$|A - \lambda I| = 0, \tag{8.5}$$

sprendimui. čia I yra antrosios eilės vienetinė matrica.

Charakteringąją lygtį perrašome taip:

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0, \tag{8.6}$$

čia $\tau = a+d$ – matricos A pėdsakas, o $\Delta = ad-bc$ – matricos A determinantas. Matricos A tikrinės reikšmės yra gautosios charakteringosios lygties šaknys

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{D}}{2}, \tag{8.7}$$

čia $D = \tau^2 - 4\Delta$. Todėl tuo atveju, kai charakteringosios lygties šaknys yra skirtingos, mes gauname du tiesiškai nepriklausomus tikrinius vektorius ir atitinkamai du tiesiškai nepriklausomus dinaminės sistemos sprendinius. Kiekviena pradinė sąlyga gali būti išreikšta surastais tikriniais vektoriais, t. y. $\overrightarrow{X} = C_1\overrightarrow{V_1} + C_2\overrightarrow{V_2}$. Tada gautų sprendinių tiesinė kombinacija

$$\overrightarrow{X} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\overrightarrow{V_1} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\overrightarrow{V_2} \tag{8.8}$$

yra dinaminės sistemos bendrasis sprendinys.

Išsiaiškinę antrosios eilės dinaminės sistemos bendrojo sprendinio struktūrą pereikime prie charakteringosios lygties (8.6) ir jos šaknų (8.7) analizės.

Prisiminę Vieto teoremą, turime, kad $\lambda_1 + \lambda_2 = \tau$, o $\lambda_1\ \lambda_2 = \Delta$. Tuomet turime atskirai aptarti tris atvejus, susijusius su charakteringosios lygties šaknimis.

I. Jei $\Delta < 0$, tai turime $D > 0$ ir gauname dvi skirtingo ženklo realiąsias charakteringosios lygties šaknis. Šiuo atveju ramybės taškas yra vadinamas **balnu**. Balnas visada yra nestabilus.

II. Jei $\Delta > 0$, tai priklausomai nuo D ženklo turime arba dvi skirtingas to paties ženklo realiąsias ($D > 0$) charakteringosios lygties šaknis, arba dvi kompleksines šaknis (tikrinės reikšmės yra kompleksiniai jungtiniai skaičiai), kai $D < 0$, arba dvi tarpusavyje lygias realiąsias šaknis ($D = 0$). Tuo atveju, kai turime dvi skirtingas to paties ženklo tikrines reikšmes, ramybės tašką vadiname **mazgu**. Kai tikrinės reikšmės yra kompleksiniai jungtiniai skaičiai, tai ramybės taškas vadinamas **židiniu** (kai kompleksinių skaičių realiosios ir menamosios dalys nelygios 0) arba **centru** (kai turime grynai menamuosius kompleksinius skaičius). Jei $D = 0$, tai turime dvi tarpusavyje lygias realiąsias tikrines reikšmes ir ramybės taškai yra **išsigimę mazgai** arba **dikritiniai mazgai**. Išsigimę mazgai gaunami tuo atveju, kai turime tik vieną tikrinį vektorių. Kai tikrinių vektorių atitinkančių tikrinę reikšmę yra begalo daug, tai turime dikritinius mazgus. Ramybės taškų stabilumą apsprendžia matricos A pėdsakas τ: kai $\tau < 0$, tai ramybės taškai yra stabilieji, o kai $\tau > 0$, tai – nestabilieji. Tuo atveju, kai $\tau = 0$ turime stabilumo požiūriu neutralų atvejį (sprendiniai juda ratu elipsinėmis trajektorijomis).

III. Jei $\Delta = 0$, tai bent viena matricos A tikrinė reikšmė yra lygi 0. Todėl ramybės taškas $(0,0)$ šiuo atveju nėra izoliuotas ir mes turime ramybės taškų tieses arba net ir visą plokštumą (tuo atveju, kai matrica $A = O$).