7 Antrosios eilės dinaminės sistemos

Iki šiol mes nagrinėjome tik pirmosios eilės dinamines sistemas. Domėjomės tokių sistemų ramybės taškų stabilumo klausimais, aiškinomės valdančiųjų parametrų įtaką ir tyrėme bifurkacijas pirmosios eilės dinaminėse sistemose.

Dabar nagrinėsime antrosios eilės dinamines sistemas. Pradžioje domėsimės tiesinėmis dinaminėmis sistemomis.

7.1 Antrosios eilės tiesinės dinaminės sistemos

Bendrasis antrosios eilės tiesinės dinaminės sistemos pavidalas yra

$$\begin{cases} x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + f_1(t), \\ y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + f_2(t), \end{cases}$$

čia $x = x(t)$, $y = y(t)$. Matome, kad tokio pavidalo sistema yra nehomogeninė. Ši sistema taip pat yra neautonominė, o jos koeficientai priklauso nuo laiko.
Pradžioje mes domėsimės tik homogeninėmis autonominėmis antrosios eilės dinaminėmis sistemomis, kurių koeficientai bus pastovūs, t. y. kurį laiką mūsų tyrimo objektas bus tokio pavidalo antrosios eilės dinaminės sistemos:

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy. \end{cases} \tag{7.1}$$

Matricinė tokios dinaminės sistemos forma yra

$$\overrightarrow{X'} = A\overrightarrow{X}, \tag{7.2}$$

čia

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}.$$

Jei turime du tokios sistemos sprendinius $\overrightarrow{X_1}$ ir $\overrightarrow{X_2}$, tai ir šių sprendinių tiesinė kombinacija yra sistemos sprendinys. Kada gausime bendrąjį nagrinėjamosios sistemos sprendinį?

Turime pastebėti, kad (7.2) dinaminė sistema su bet kuria matrica A visada turi ramybės tašką $\overrightarrow{X^*} = \overrightarrow{O}$.

Dinaminės sistemos (7.2) sprendinys yra tam tikra plokštumos xOy trajektorija. Plokštuma, kurioje vaizduojame dinaminės sistemos (7.2) sprendinius yra vadinama fazine plokštuma.

Žinoma, tokias nesudėtingas antrosios eilės dinamines sistemas mes galime pakeisti viena antrosios eilės diferencialine lygtimi ir tirti jos sprendinius bei jų elgseną. Tačiau šiame kurse mums tai nėra įdomu. Mes pasitelksime bendresnę teoriją, kuri leidžia nagrinėti dinaminės sistemos elgseną nesprendžiant pačios sistemos (tą patį tikslą sau kėlėme ir tirdami pirmosios eilės dinamines sistemas).

Nagrinėjant antrosios eilės dinamines sistemas išlieka svarbūs judančio taško padėties ($\overrightarrow{X}(t)$) ir to taško judėjimo greičio ($\overrightarrow{V}(t)$) įvertinimo klausimai.

7.2 Antrosios eilės tiesinės dinaminės sistemos ramybės taškų stabilumas

Apibrėšime kiek bendresnės autonominės dinaminės sistemos

$$\overrightarrow{X'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{X}) \tag{7.3}$$

ramybės taškų $\overrightarrow{X^*}$ stabilumą.

7.1 Apibrėžimas. Dinaminės sistemos (7.3) ramybės taškas $\overrightarrow{X^*}$ yra vadinamas pritraukiančiu arba stabiliuoju, jei $\exists\delta > 0 : \lim\limits_{t\to\infty} \overrightarrow{X}(t) = \overrightarrow{X^*}$, kai $||\overrightarrow{X}(0) - \overrightarrow{X^*}|| < \delta$.

7.2 Apibrėžimas. Dinaminės sistemos (7.3) ramybės taškas $\overrightarrow{X^*}$ yra vadinamas stabiliuoju Liapunovo prasme, jei $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : ||\overrightarrow{X}(t) - \overrightarrow{X^*}|| < \varepsilon$, $t \geqslant 0$ ir $||\overrightarrow{X}(0) - \overrightarrow{X^*}|| < \delta$.

7.3 Apibrėžimas. Dinaminės sistemos (7.3) ramybės taškas $\overrightarrow{X^*}$ yra vadinamas asimptotiškai stabiliuoju, jei jis yra pritraukiantis ir stabilusis Liapunovo prasme.