1 Vienmatis atvejis

1.1 Sprendiniai tiesėje

Vienmačiu atveju nagrinėjame vieną autonominę diferencialinę lygtį, užrašytą normaliąja forma, t. y. $\frac{dx}{dt} = f(x)$, čia $x = x(t)$, o funkcija $f(x)$ yra tolydi realiojo argumento funkcija. Tai – pirmosios eilės dinaminė sistema. Tokias dinamines sistemas jau esame nagrinėję diferencialinių lygčių kurse. Šiame kurse mūsų nedomina analizinės diferencialinės lygties sprendinių išraiškos, o tik kokybinė analizė. T. y. mes norime atsakyti į klausimą, kas nutiks su šia dinamine sistema po labai ilgo laiko intervalo, kaip elgiasi sprendiniai bėgant laikui?

Tirdami dinaminę sistemą turime suprasti, kad jos dešinės pusės funkcija apibūdina sprendinio funkcijos kitimo greitį. Tuomet xOx' plokštumos taškuose, kuriuose $f(x) > 0$ mes turime judėjimus nukreiptus teigiamąja Ox ašies kryptimi, o tuose taškuose, kuriuose $f(x) < 0$ – neigiamąja Ox ašies kryptimi. Dar šioje ašyje mes turime ir taškus, kuriuose nėra judėjimo. Tai – dinaminės sistemos ramybės taškai.

1.1 Apibrėžimas. Ramybės taškai, kurių aplinkoje prasidėję judėjimai yra nukreipti į ramybės tašką, vadinami stabiliaisiais arba atraktoriais.

1.2 Apibrėžimas. Ramybės taškai, kurių aplinkoje prasidėję judėjimai yra nukreipti tolyn nuo ramybės taško, vadinami nestabiliaisiais arba repeleriais.

1.3 Apibrėžimas. Ramybės taškai, kurių aplinkoje prasidėję judėjimai iš vienos taško pusės yra nukreipti link ramybės taško, o iš kitos taško pusės – tolyn nuo ramybės taško vadinami pusiau stabiliaisiais arba šuntais.

Pateiksime bendrąją pirmosios eilės dinaminės sistemos tyrimo schemą:

1. Surandame dinaminės sistemos ramybės taškus.
2. xOx' plokštumoje nubrėžiame funkcijos $f(x)$ grafiką.
3. Ox ašyje atsižvelgdami į $f(x)$ ženklą pažymime trajektorijų judėjimo kryptis.

Jei nagrinėjame dinaminę sistemą ir žinome pradinę sąlygą, tai tuomet ši schema išplečiama ir sprendinio elgsena nagrinėjama tik analizuojant judėjim1, prasidėjus5 taške $x_0 = x(0)$.

1.2 Netiesinių funkcijų linearizacija

Kitas labai svarbus kokybinės analizės klausimas, kaip greitai judame į ramybės tašką arba kaip greitai tolstame nuo jo. Tarkime, kad mes domimės judėjimu toli nuo ramybės taško, t. y. turime $\eta(t) = x(t) - x^*$, čia x^* – ramybės taškas. Norėdami išnagrinėti sprendinio elgesną po tokio sužadinimo turime sudaryti diferencialinę lygtį, t. y. $\eta'(t) = (x(t) - x^*)'$ arba $\eta'(t) = x'(t)$. Tačiau mes nagrinėjame dinaminę sistemą $x' = f(x)$, kurios funkciją po sužadinimo užrašome taip: $f(\eta + x^*)$. Tuomet tiriame dinaminę sistemą:

$$x' = f(\eta + x^*).$$

Dešinės pusės funkciją skleidžiame Teiloro eilute taške $x = x^*$ ir gauname naują dinaminę sistemą:

$$\eta' = \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

Kai $f'(x^*) \not\equiv 0$, tai gauname tiesinę dinaminę sistemą, kuri vadinama pirmosios eilės dinaminės sistemos linearizacija taško $x = x^*$ aplinkoje. Išsprendę šią lygtį, matome, kad tuo atveju, kai $f'(x^*) > 0$, gauname, kad ramybės taškas yra nestabilusis, o, kai $f'(x^*) < 0$, tai – stabilusis. Kaip sužinoti, kiek stabilus yra ramybės taškas? Į šį klausimą galime atsakyti įvertinę fliuktuacijos gesimo arba augimo laiką, t. y.

$$\tau = \frac{1}{|f'(x^*)|}.$$

Kuo mažesnė τ reikšmė, tuo greitesnis procesas.