10 Netiesinės antrosios eilės dinaminės sistemos

10.1 Netiesinių narių įtaka

Ankstesniajame skyriuje antrosios eilės netiesinėms dinaminėms sistemoms tirti taikėme linearizacijos metodą. Minėjome, kad šis metodas tinkamas tik tol, kol nesusiduriame su ribiniais ramybės taškų atvejais. Ribiniams atvejams priskiriami centrai, išsigimę mazgai ir dikritiniai mazgai. Šioje paskaitoje aptarsime, kaip tiriamos ribinius ramybės taškus turinčios netiesinės dinaminės sistemos.

Nagrinėkime antrosios eilės netiesinę dinaminę sistemą:

$$\begin{cases} x' = -y + ax(x^2 + y^2), \\ y' = x + ay(x^2 + y^2). \end{cases} \tag{10.1}$$

Šios dinaminės sistemos ramybės taškai yra netiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} -y + ax(x^2 + y^2) = 0, \\ x + ay(x^2 + y^2) = 0. \end{cases}$$

sprendiniai. Ši sistema turi tik vieną sprendinį, todėl atitinkama dinaminė sistema turi tik vieną ramybės tašką – $(0, 0)$. Siekdami išsiaiškinti šio ramybės taško tipą, užrašome Žordano matricą

$$A = \begin{pmatrix} 3ax^2 + ay^2 & -1 + 2axy \\ 1 + 2axy & ax^2 + 3axy^2 \end{pmatrix}$$

ir sudarome jos išraišką ramybės taške

$$A_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Surandame dinaminės sistemos charakteristikas: pėdsakas – $\tau = 0$, determinantas – $\Delta = 1$, o diskriminantas – $D = -4$. Kaip matome, ramybės taškas yra centras, kuris priskiriamas prie ribinių atvejų. Todėl dabar pabandykime išspręsti duotąją netiesinę dinaminę sistemą ir įsitikinti, kad tik atskiru atveju sprendinių trajektorijos bus elipsės (kas yra būdinga centrams).

Atlikime koordinačių pakeitimą dinaminėje sistemoje, t. y. pereikime prie polinių koordinačių:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi. \end{cases}$$

Užrašome nagrinėjamą dinaminę sistemą (10.1) naujoje koordinačių sistemoje

$$\begin{cases} r' cos\phi - r\phi'\sin\phi = -r\sin\phi + ar\cos\phi(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi), \\ r' sin\phi + r\phi'\cos\phi = -r\cos\phi + ar\sin\phi(r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi) \end{cases}$$

ir pritaikę trigonometrines formules turime tokią sistemą:

$$\begin{cases} r' cos\phi - r\phi'\sin\phi = -r\sin\phi + ar^3\cos\phi, \\ r' sin\phi + r\phi'\cos\phi = -r\cos\phi + ar^3\sin\phi. \end{cases} \tag{10.2}$$

Pirmąją gautosios sistemos (10.2) lygtį padauginame iš $\cos\phi$, o antrąją – iš $\sin\phi$ ir sudėję gauname

$$r' = ar^3. \tag{10.3}$$

Po to pirmąją sistemos (10.2) lygtį padauginę iš $\sin\phi$, o antrąją – iš $\cos\phi$ ir iš pirmosios atėmę antrąją gauname

$$\phi' = 1. \tag{10.4}$$

Iš gautųjų naujų lygčių (10.3), (10.4) sudarome naują natiesinę antrosios eilės diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} r' = ar^3, \\ \phi' = 1. \end{cases} \tag{10.5}$$

Ši dinaminė sistema parodo, kad kampinis judėjimo greitis ϕ yra pastovus. Kiekvieną šios sistemos diferencialinę lygtį spręsdami atskirai surandame sistemos sprendinius:

$$\begin{cases} \phi = t + C_1, \\ r^2 = \frac{1}{-2at-2C_2}. \end{cases} \tag{10.6}$$

Jei turime pradines sąlygas $\phi(0) = \phi_0$, o $r(0) = r_0$, tai tuomet iš (10.6) sudarome trajektorijų lygtis

$$\begin{cases} \phi = t + \phi_0, \\ r^2 = \frac{1}{-2at+\frac{1}{r_0^2}}. \end{cases}$$

Gautas rezultatas leidžia suprasti, kad sistemos sprendiniai (trajektorijos atstumas nuo poliaus) priklauso nuo parametro a reikšmių:

1) kai $a = 0$, tai tuomet $r^2 = r_0^2$ ir turime ramybės tašką centrą – judėjimo trajektorijos bus apskritimai,

2) kai $a > 0$, tai tuomet, kai $t \to \infty$, tai ir $r \to \infty$ ir turime ramybės tašką – nestabilųjį židinį (judėjimo trajektorijos bus spiralės tolstančios nuo pradinio taško),

3) kai $a < 0$, tai tuomet, kai $t \to \infty$, tai ir $r \to 0$ ir šiuo atveju ramybės taškas – stabilusis židinys (judėjimo trajektorijos – spiralės nukreiptos į ramybės tašką).

Išnagrinėtas pavyzdys puikiai iliustruoja ribinio ramybės taško jautrumą netiesiniams nariams.

10.2 Hiperboliniai stabilumo taškai. Struktūrinis stabilumas

Kai dinaminės sistemos abi tikrinės reikšmės yra tokios, kad $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$, tai tuomet neturime ribinio atvejo ir tada dinaminės sistemos ramybės taškas vadinamas hiperboliniu. Tokių taškų stabilumui maži netiesiškumai nedaro jokios įtakos. Tuo tarpu nehiperboliniai ramybės taškai yra jautrūs netiesiškumams.

10.1 Teorema. ***Hartmano – Grobmano teorema.***
Lokalusis fazinis portretas hiperbolinio ramybės taško aplinkoje yra topologiškai ekvivalentus linearizuotos sistemos faziniam portretui.

Topologinis ekvivalentumas suprantamas kaip abipusė tolydžioji kintamųjų transformacija, kuri atvaizduoja vieną lokalųjį fazinį portretą į kitą, trajektorijas atvaizduoja į trajektorijas ir išsaugo rodyklių kryptis. Tokiu būdu topologiškai ekvivalentus fazinis portretas yra deformuotas ankstesniojo fazinio portreto vaizdas.

10.1 Apibrėžimas. Fazinis portretas vadinamas struktūriškai stabiliu, jei jo topologijos nekeičia maži baigtiniai vektorinio lauko sutrikdymai.

Struktūriškai stabilaus fazinio portreto pavyzdys galėtų būti balnas. O centras nėra struktūriškai stabilus, nes, kaip matėme ankstesniojo skyrelio pavyzdyje, nedideli sistemos sutrikdymai centrą paverčia židiniais.

10.3 Ribiniai ciklai

Šiame skyrelyje kalbėsime apie reiškinius, kuriuos galime sutikti tik netiesinėse sistemose. Tiesinėse sistemose jų negali būti. Tieisnės sistemos gali turėti sprendinius – uždaras trajektorijas – orbitas, tačiau teisinėse sistemose orbitos negali būti izoliuotos, t. y. turėdami vieną periodinį sprendinį $\overrightarrow{X}(t)$ mes iš jo gauname kitą sprendinį $C\overrightarrow{X}(t)$ $(C \neq 0)$ – peršokame į kitą orbitą. Suprantama, kad orbitą lemia pradinės sąlygos. Ir net nedideli sistemos sutrikdymai negrįžtamai (visam laikui) pakeičia trajektoriją. Netiesinėse sistemose sutinkami ribiniai ciklai priklauso ne nuo pradinių sąlygų, o nuo pačios nagrinėjamos sistemos.

10.2 Apibrėžimas. Ribiniu ciklu vadinama uždara izoliuota trajektorija.

10.3 Apibrėžimas. Ribinis ciklas vadinamas stabiliuoju (pritraukiančiu), jei kiekviena gretima trajektorija artėja prie ribinio ciklo. Priešingu atveju ribinis ciklas vadinamas nestabiliuoju.

Tačiau kalbant apie ribinius ciklus galima ir tokia situacija, kai viena trajektorija artėja prie nagrinėjamo ribinio ciklo, o kita – nuo jo tolsta. Tuomet sakoma, kad ribinis ciklas yra pusiau stabilusis. Stabilieji ribiniai ciklai leidžia modeliuoti savaime (neveikiant jokiai išorinei jėgai) osciliuojančias dinamines sistemas.

Kaip sužinoti, ar kuri nors netiesinė dinaminė sistema turi ribinių ciklų? Atsakymo į šį klausimą ieškosime nagrinėdami uždarų orbitų nebuvimo sąlygas ir domėsimės tokių orbitų nustatymo galimybėmis. Tik pagal lygtis mes negalime pasakyti, ar dinaminė sistema turi ribinių ciklų, ar tik uždaras orbitas.

11 Uždarų orbitų nebuvimo požymiai

11.1 Gradientinės sistemos

11.1 Apibrėžimas. Gradientine sistema vadinama dinaminė sistema, kuri gali būti užrašyta pavidalu $\overrightarrow{X}' = -\nabla V$, čia $V(\overrightarrow{X})$ – tolydi, diferencijuojama vieno kintamojo skaliarinė funkcija vadinama sistemos potencialo funkcija.

11.1 Teorema. *Jei sistema yra gradientinė, tai joje nebus uždarų orbitų.*

Jei dinaminei sistemai

$$\begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y). \end{cases}$$

galioja lygybė $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, tai sistema yra gradientinė.

11.2 Liapunovo funkcijos egzistavimas

11.2 Teorema. *Jei dinaminei sistemai egzistuoja Liapunovo funkcija, tai sistema neturi uždarų orbitų.*

Nagrinėkime dinaminę sistemą

$$\overrightarrow{X}' = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{X}\right),$$

kurios ramybs taškas yra taškas $\overrightarrow{X}^*$.

11.2 Apibrėžimas. Liapunovo funkcija vadiname tolydžiai diferencijuojamą funkciją $V(\overrightarrow{X})$, turinčią šias savybes:

1) $V(\overrightarrow{X}) > 0$, $\forall \overrightarrow{X} \neq \overrightarrow{X}^*$, o $V(\overrightarrow{X}^*) = O$,

2) $\frac{dV}{dt} < 0$, $\forall \overrightarrow{X} \neq \overrightarrow{X}^*$, t. y. visos trajektorijos artėja link ramybės taško, kai $t \to \infty$.

Tokiu būdu, sukonstravę Liapunovo funkciją turime, kad ramybės taškas $\overrightarrow{X}^*$ yra globaliai asimptotiškai stabilusis ir su visomis pradinėmis sąlygomis sprendinių trajektorijos artėja į jį, kai $t \to \infty$. O tai reiškia, kad sistema neturi uždarųjų orbitų. Tačiau šis tyrimo būdas nėra patogus, nes neturime taisyklių, kaip sukonstruoti Liapunovo funkciją.

11.3 Dulako kriterijus

11.3 Teorema. ***Dulako kriterijus.***
Jei dinaminė sistema $\overrightarrow{X}' = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{X}\right)$ nustato tolydžiai diferencijuojamą vektorinį lauką, apibrėžtą silpnai jungiajame plokštumos poaibyje $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^2$, ir egzistuoja tolydžiai diferencijuojama realiojo argumento funkcija $g(\overrightarrow{X})$ tokia, kad $\nabla \cdot \left(g \cdot \overrightarrow{X}'\right)$ turi pastovų ženklą visoje srityje $\mathcal{D}$, tai tuomet šioje srityje nėra uždarų orbitų.

12 Uždarųjų orbitų nustatymas

12.1 Teorema. ***Puankare – Bendiksono teorema.***
Jei

1) $\mathcal{R}$ yra uždara aprėžta plokštumos sritis,

2) dinaminė sistema $\overrightarrow{X}' = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{X}\right)$ nustato tolydžiai diferencijuojamą vektorinį lauką atviroje srityje, apimančioje $\mathcal{R}$,

3) nėra ramybės taškų, priklausančių sričiai $\mathcal{R}$,

4) egzistuoja tokia trajektorija C, kuri prasideda ir visą laiką lieka srityje $\mathcal{R}$,

tai tuomet arba trajektorija C yra uždaroji orbita, arba C prie jos asimptotiškai artėja, kai $t \to \infty$.

Puankare – Bendiksono teorema yra viena svarbiausių netiesinės dinamikos teoremų, kuri garantuoja, kad plokštumoje choso nėra. Tačiau šią teoremą patogu taikyti tik polinėje koordinačių sistemoje.