Techmatų olimpiados 2015 uždavinių sprendimai

1. 2x2 lentelės langeliuose užrašyti keturi skaičiai. Prie kiekvieno skaičiaus galima pridėti bet kokį skaičių, tačiau tokį patį skaičių reikia pridėti ir prie kaimyniniuose langeliuose esančių skaičių. Kaimyniniais langeliais laikomi tie, kurie turi bendrą kraštinę.
Pavyzdys: prie pirmo langelio pridedame 6:

2	1
-5	5

=>

2+6	1+6
-5+6	5

=>

8	7
1	5

Ar įmanoma padaryti taip, kad visi šioje lentelėje esantys skaičiai taptų lygūs 0? (5 taškai)
Sprendimas: vienas iš sprendimo būdų yra tiesiog paeiliui atlikinėti veiksmus mėginant gauti visus keturis nulius:

8-1	7
1	5

=>

7	6-5
0	5

=>

2	1
0	0+2

=>

2	3
2-2	2

=>

0	3-1
0	0

=>

=>

-1-1	2
0	-1

=>

-2	1
-1	-1-1

=>

-2	0
-2+2	-2

=>

0	0
0	0

Sekantis būdas yra susidaryti lygčių sistemą. Tarkime prie pirmojo langelio pridedame x, tuomet ir prie kaimyninių langelių turime pridėti po x:

8+x	7+x
1+x	5

Prie antrojo langelio ir jo kaimynų pridedame po y:

8+x+y	7+x+y
1+x	5+y

Viską analogiškai atliekame ir su kitais langeliais:

8+x+y+z	7+x+y+t
1+x+z+t	5+y+z+t

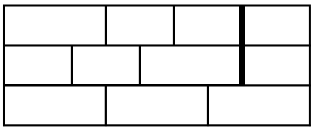
Tikslas gauti lentelę su keturiais nuliais, todėl kiekvieną lygtį prilyginame nuliui ir gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

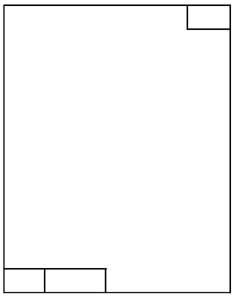
Išsprendę sistemą gauname sprendinį:

$$x = -2, y = -6, z = 0, t = 1.$$

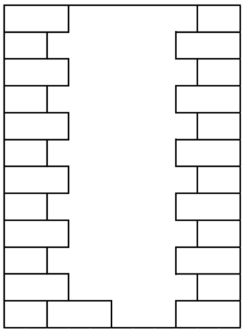
2. Siena statoma tik iš horizontalių plytų 2x1 ir 3x1. Siena laikoma „tvirta“, jeigu nėra vertikalių tarpų besijungiančių per du aukštus. Netvirtos sienos pavyzdys:



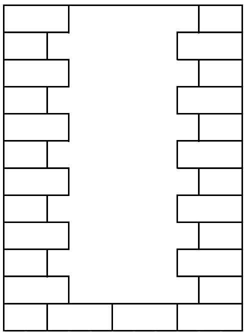
Ar šį pradėta statyti 11x12 (11 plotis, 12 aukštis) siena gali būti „tvirta“ siena ? Jei taip, tai kiek tokių „tvirtų“ sienų egzistuoja? (5 taškai)



Sprendimas: ant šone esančių 2x1 plytų galime uždėti tik 3x1 plytas, o ant 3x1 – tik 2x1 plytas. Kadangi jau turime bent po vieną plytą prie abiejų šonų, todėl juos sugeneruoti galime vieninteliu būdų:



Apačioje liko tarpas, kurio ilgis 11-2-3-3=3, tad jį užpildyti galime vieninteliu būdu:



Antrame aukšte liko tarpas, kurio ilgis 11-3-2=6, tad jį užpildyti galėtume dviejomis plytomis 3x1 arba trejomis plytomis 2x1. Tačiau jeigu dėsime tris plytas 2x1, tuomet sienoje atsiras siūlė einanti per du aukštus, todėl siena nebus tvirta. Užpildžius antrą aukštą, sekančiuose aukštuose susidaro lygiai tokia pati situacija kaip antrajame, tad norint išlaikyti tvirtą sieną, visus likusius aukštus taip pat turėsime užpildyti tik 3x1 plytomis. Atsakymas: egzistuoja tik viena tokia siena

3. Ar egzistuoja toks realių skaičių rinkinys $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kuriam galiotų savybės:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i < 1,$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^3 > 1,$$

$$x_i < 1, i = 0,1, \dots, n.$$ (5 taškai)

Sprendimas: akivaizdu, kad jeigu imsime skaičius tik iš intervalo (0,1), toks rinkinys neegzistuos, nes tuomet visada galios nelygybė $x^3 < x$ ir kubų suma niekada nebus didesnė už pirmo laipsnio narių sumą. Iš to išplaukia, kad arba toks rinkinys apskritai neegzistuoja, arba rinkinyje privalo būti ir neigiamų skaičių (taip pat akivaizdu, kad negali būti visi neigiami). Tarkime, kad rinkinyje yra n vienodų teigiamų skaičių kurie lygūs x ir m neigiamų skaičių, kurių modulis lygūs y.

Tuomet sumas galime perrašyti taip:

$$n \cdot x - m \cdot y < 1,$$

$$n \cdot x^3 - m \cdot y^3 > 1.$$

Tarkime $n = 2, x = 0.8$, tuomet pertvarkytos nelygybės atrodys taip:

$$0{,}6 < m \cdot y,$$

$$0{,}024 > m \cdot y^3.$$

Iš pirmos nelygybės išreiškiu *m* ir statau į antrąją nelygybę:

$$m > \frac{0{,}6}{y},$$

$$0{,}024 > \frac{0{,}6}{y} \cdot y^3 \Rightarrow 0{,}04 > y^2 \Rightarrow 0{,}2 > y.$$

Gavome, kad parinkus tokius n ir x, y visada turės būti mažiau už 0,2. Imkime $y = 0{,}15$. Tokiu atveju *m* turės būti didesnis už $\frac{0{,}6}{0{,}15} = 4$, tad imkime reikšmę 5. Patikrinkime rezultatus:

$$2 \cdot 0{,}8 + 5 \cdot (-0{,}15) = 0{,}85,$$

$$2 \cdot 0{,}8^3 + 5 \cdot (-0{,}15)^3 \approx 1{,}00713.$$

4. Sandėlyje stovi 66 statinės, kurios sunumeruotos nuo 1 iki 66. Kiekvienoje statinėje yra po 66 aukso luitus ir visi jie sveria po *n* miligramų ($n \epsilon N$). Naktį vagys įsilaužė į sandėlį ir pavogė visus aukso luitus iš vienos statinės ir vietoje pavogtų aukso luitų paliko padirbtus aukso luitus. Visi padirbti aukso luitai sveria po *m* miligramų ($m \epsilon N$) ir nuo tikrųjų skiriasi labai minimaliai (svoris skiriasi iki 2%). Ryte sargas žinojo tik tai, kad aukso luitai pavogti iš kažkurios vienos statinės ir tikri luitai pakeisti padirbtaisiais, kurių svorio skirtumas nuo tikrų yra labai minimalus. Sargas sugalvojo unikalią strategiją, kuri turėtų padėti išsiaiškinti nusikaltimo aplinkybes. Jis pasiėmė vienratį karutį, nuriedėjo su juo į sandėlį, pritaikęs savo strategiją susikrovė krūvą aukso luitų ir visą kroviną suvertė ant svarstyklių. Svarstyklėse užsidegė skaičius 1976465 mg. Sargas pasiėmė lapuką, atliko porą veiksmų ir sušuko: - Eureka!
   1) Kokią strategiją pritaikė sargas sandėlyje imdamas aukso luitus iš statinių? (2 taškai)
   2) Kiek sveria vienas tikras aukso luitas? (1 taškas)
   3) Kiek sveria vienas netikras aukso luitas? (1 taškas)
   4) Iš kurios statinės buvo pavogti aukso luitai? (1 taškas)

   Sprendimas: Strategija yra iš skirtingų statinių imti po skirtingą kiekį aukso luitų, t.y. iš pirmos statinės vieną luitą, iš antros – du, iš trečios – tris ir t.t. Sargas, pritaikęs šią strategiją, karutyje turėjo 1+2+3+...+65+66=2211 aukso luitus. Kadangi tikri ir netikri luitai skiriasi labai nežymiai, todėl padalinę visą masę iš surinktų aukso luitų kiekio, gausime skaičių, kuris ganėtinai tiksliai nusako tikro luito svorį:

$$\frac{1976465}{2211} \approx 893{,}92\, mg.$$

   Tarkime tikras aukso luitas sveria 893 mg. Tuomet norint rasti netikro luito svorį bei statinės numerį, sudarome tokią lygtį:

$$1976465 - 893 \cdot 2211 = s \cdot (m - 893),$$
$$2042 = s \cdot (m - 893).$$

   Išskaidykime 2042 visais galimais būdais:

$$1 \cdot 2042,$$
$$2 \cdot 1021.$$

   Kadangi statinės numeris nuo 1 iki 66, tai pirmu atveju gautume, kad statinės numeris buvo 1, o svorių skirtumas 2042 mg, tačiau tai netenkina sąlygoje minimų 2% skirtumo. Analogiška situacija ir su sekančiais daugikliais. Vadinasi tikri luitai negalėjo sverti po 893 mg. Imkime, kad tikri luitai sveria po 894 mg. Tuomet lygtis atrodys taip:

$$1976465 - 894 \cdot 2211 = s \cdot (m - 894),$$
$$169 = s \cdot (m - 894).$$

   Išskaidykime 169 visais galimais būdais:

$$1 \cdot 169,$$
$$13 \cdot 13.$$

   Pirmu atveju vėl gautume, kad statinės numeris 1, o svorių skirtumas 169 mg, tačiau ir šis skirtumas yra per didelis, todėl pirmas variantas atkrenta. Antru atveju gauname , kad statinės numeris 13 ir svorių skirtumas 13mg. Toks skirtumas jau tenkina 2% reikalavimą. Apskaičiuojame netikrų luitų svorį:

$$894 - 13 = 881\, mg.$$