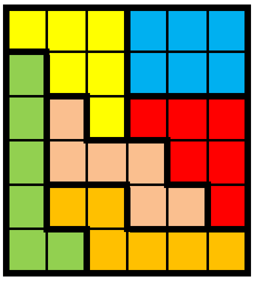
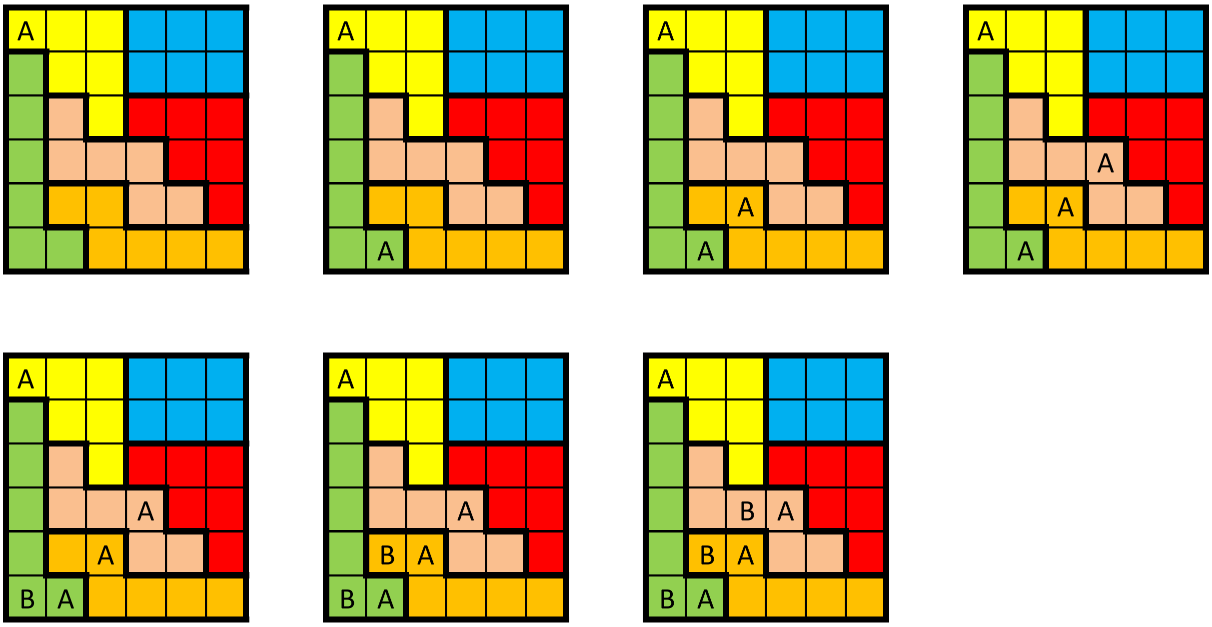
SPRENDIMAI

1) Užpildykite lentelę skaičiais nuo 1 iki 6 taip, kad stulpeliuose, eilutėse ir spalvotuose ploteliuose skaičiai nesikartotų. Keliais būdais tai galima padaryti? (**5 taškai**)



Sprendimas:



Geltonajame plotelyje neliko vietos simboliui B, todėl ši lentelė sprendinių neturi.

ATS: 0

2) Imkime rekurentinę išraišką:

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}, \qquad A_n \in Z$$

Pasižymėkime *S* kaip šeštos dešimties narių sumą:

$$S = \sum_{i=60}^{69} A_i = A_{60} + A_{61} + A_{62} + \cdots + A_{69}.$$

Kokia bus A_{66} reikšmė, jeigu:

A) *S* yra lygi Petriuko gimtadienio datos (mėn. ir d.) skaitmenų sumai (pvz: jei gimė 03.20, tai suma būtų 0+3+2+0=5). (**2 taškai**)

B) *S* turi 677 daliklius. (**3 taškai**)

Sprendimas:
Įveskime pažymėjimus:

$$A_{60} = x,$$
$$A_{61} = y.$$

Panaudodami rekurentinę išraišką, išreiškime sekančius narius per *x* ir *y:*

$$A_{62} = x + y,$$
$$A_{63} = x + 2y,$$
$$A_{64} = 2x + 3y,$$
$$A_{65} = 3x + 5y,$$
$$A_{66} = 5x + 8y,$$
$$A_{67} = 8x + 13y,$$
$$A_{68} = 13x + 21y,$$
$$A_{69} = 21x + 34y.$$

Sudedame visus narius ir gauname:

$$S = 55x + 88y.$$

Nesunku pastebėti, kad su bet kokiais *x* ir *y* ši suma visada dalinasi iš 11, o $A_{66} = \frac{S}{11}$.

Punkte A buvo pasakyta, kad S yra Petriuko gimtadienio datos skaitmenų suma. Mažiausia suma būtų jeigu jis gimė 01.01 (suma=2), didžiausia – 09.29 (suma 20). Vadinasi S priklauso intervalui nuo 2 iki 20, tačiau šiame intervale yra tik vienas skaičius kuris dalinasi iš 11. Todėl S=11, o $A_{66} = \frac{S}{11} = 1$.

Punkte B buvo pasakyta, kad S yra skaičius, turintis 677 daliklius.

TAISYKLĖ: skaičiaus $n = p1^{a1} \cdot p2^{a2} \cdot \cdots \cdot pk^{ak}$ daliklių kiekis apskaičiuojamas per sandaugą $a1 + 1 \cdot a2 + 1 \cdots ak + 1$.

Gauname sąlygą:

$$a1 + 1 \cdot a2 + 1 \cdots ak + 1 = 677.$$

Pamėginkime išskaidyti skaičių 677 pirminiais dauginamaisiais (tikrinsime iki $\overline{677} \approx 26$):

$$677\ mod\ 2 = 1,$$
$$677\ mod\ 3 = 2,$$
$$677\ mod\ 5 = 2,$$
$$677\ mod\ 7 = 5,$$
$$677\ mod\ 11 = 6,$$
$$677\ mod\ 13 = 1,$$
$$677\ mod\ 17 = 14,$$
$$677\ mod\ 19 = 12,$$
$$677\ mod\ 23 = 10.$$

Matome, kad 677 neturi pirminių daliklių, vadinasi jis pats yra pirminis skaičius.
Kadangi 677 neįmanoma išskaidyti, todėl gauname:

$$a1 + 1 = 677 => a1 = 676.$$

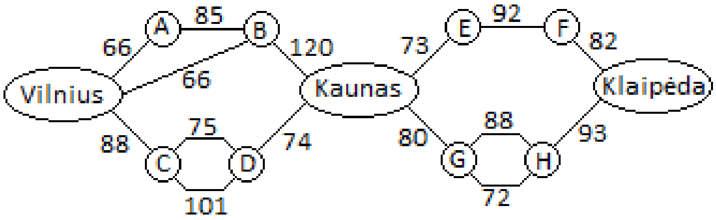
Todėl S gali turėti tik tokį pavidalą:

$$S = p^{676}.$$

Taip pat žinome, kad S turi dalintis iš 11, todėl $S = 11^{676}$, o $A_{66} = \frac{S}{11} = 11^{675}$.

ATS: A)1 B) 11^{675}

3) Turime žemėlapį, kuriame nurodyti laikai, reikalingi nutiesti keliams nuo vieno punkto iki kito (pvz: nutiesti kelią nuo punkto B iki Kauno užtrunka 120h).



Vilniuje buvo pasamdytos dvi vienodu pajėgumu dirbančios kelininkų brigados, kurioms buvo įsakyta kuo greičiau nutiesti visus kelius jungiančius Vilnių su Klaipėdą. Taip pat kelininkams buvo iškeltos tam tikros taisyklės:

- Kiekvieną kelio atkarpą gali tiesti tik viena komanda
- Nebaigus pradėtos kelio atkarpos, negalima peršokti prie kitos
- Negalima pradėti tiesti kelio, iki kurio dar yra nenutiestų kelių (pvz: negalima tiesti kelio A-B, kol nenutiestas kelias Vilnius-A)

Kokia tvarka reikia tiesti kelius, kad viskas būtų baigta greičiau nei per 666 valandas? (**5 taškai**)

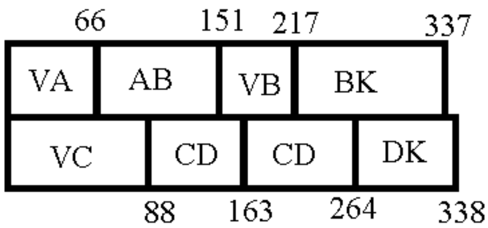
Sprendimas:

Uždavinys susideda iš dviejų dalių:

1)optimaliai sudėlioti darbus keliams nuo Vilniaus iki Kauno

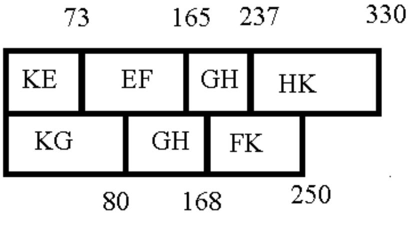
2)optimaliai sudėlioti darbus keliams nuo Kauno iki Klaipėdos

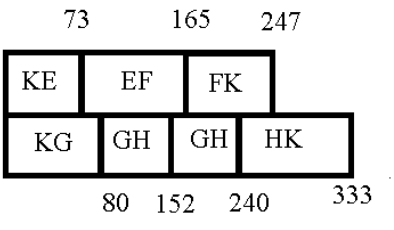
Sudėliokime darbus nuo Vilniaus iki Kauno:

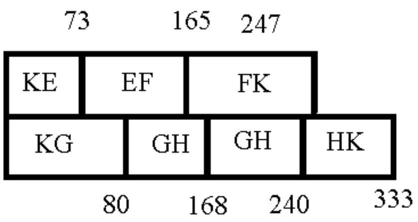


Akivaizdu, kad geresnio tvarkaraščio sudaryti nepavyks, nes vieną valandą padalinti dviems komandoms neįmanoma (visi darbai atliekami per sveiką skaičių valandų).

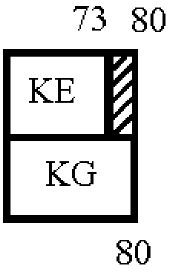
Sudėliokime darbus nuo Kauno iki Klaipėdos. Pamėginkime perrinkti visus variantus:



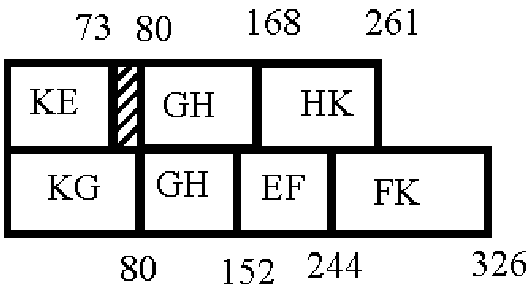




Kaip matome, nei vienas iš šių tvarkaraščių mums netinka, nes viršytų bendrą 666 valandų ribojimą. Pamėginkime tvarkaraštį sudaryti taip, kad ilgiausias darbas HK būtų atliktas kuo greičiau. Tuo tikslu priimsime netikėtą žingsnį: viena brigada nutiesusi kelią KE lauks kitos brigados, kuri dar tiesia kelią KG.



Šiuo žingsniu prarandame 7h valandas, tačiau galbūt pavyks jas atpirkti su kitais darbais.



Kaip matome, buvo vertą pradžioje padaryti pertrauką vardan to, kad greičiau galėtųme tiesti daugiausia laiko reikalaujančią atkarpą HK. Dabar bendra darbų suma 338+326=664 neviršyja 666 valandų, todėl tvarkaraštis tenkina sąlygą.

4) Imkime begalinę eilutę:

$$1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,\cdots$$

Šios eilutės n-ojo nario formulę galime užrašyti “sąlygine” forma:

$$f(n)=\begin{cases}1, & kai\ n=2k\\ -1, & kai\ n=2k+1\end{cases}$$

n-ojo nario formulę galime užrašyti ir nenaudodami “sąlyginės” formos:

$$(-1)^n,\qquad \cos(\pi n),\qquad 1-2\cdot(n\ mod\ 2)$$

Paimkime dar vieną begalinę eilutę:

$$0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\cdots$$

Šios eilutės n-ojo nario “sąlyginė” forma:

$$f(n)=\begin{cases}0, & kai\ n\neq 6\\ 1, & kai\ n=6\end{cases}$$

Užrašykite šios eilutės n-ojo nario formulę nenaudodami “sąlyginės” formos? (**5 taškai**)

Pastaba Formulės sudarymui galima naudoti tik šias operacijas: + (sumavimas), - (atimtis), · (daugyba), / (dalyba), ^ (kėlimas laipsniu), √ (šaknies traukimas), () (paprasti skliausteliai).

Sprendimai:

$$\frac{\sqrt{(n-5)^2}-2\sqrt{(n-6)^2}+\sqrt{(n-7)^2}}{2},$$

$$\frac{\sqrt{\left(\sqrt{(n-6)^2}-1\right)^2}-\left(\sqrt{(n-6)^2}-1\right)}{2},$$

$$\frac{1-(-1)^{2^{(n-6)^2}}}{2}.$$