Skaičiavimo metodų ir matematinio modeliavimo seminaras Nr. 15 (102)

Matematinės fizikos uždaviniai: specialieji skyriai. 4

Raimondas ČIEGIS

Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas,

Saulėtekio al. 11, Vilnius, Lietuva

e-mail: rc@fm.vgtu.lt

Sobolevo erdvės

1. Hilberto erdvės $H^k(\Omega)$

$$H^k = H^k(\Omega) = \{v \in L_2 : \quad D^\alpha v \in L_2, \quad |\alpha| \le k\}.$$

Jos skaliarinė sandauga

$$(v,w)_k = (v,w)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha v \, D^\alpha w \, dx$$

ir norma

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = (v,v)_k^{1/2}.$$

$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $H^k(\Omega)$.

Funkcijų erdvė $H_0^k(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \quad \gamma v = 0\}.$$

$\mathcal{C}_0^k(\bar{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $H_0^k(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ dualioji erdvė $(H_0^1)^* = H^{-1}(\Omega)$ yra erdvė tiesinių, aprėžtų funkcionalų, apibrėžtų funkcijoms $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\|L\|_{-1} = \sup_{v \in H_0^1} \frac{|L(v)|}{|v|_1}.$$

$H^1(\Omega)$ funkcijų pratęsimas

1 teorema. *Tarkime, kad* $\Omega \in \mathcal{R}^d$ $(d \geq 2)$ *yra aprėžta sritis, jos kontūras* Γ *glodus (arba sritis stačiakampė). Tada operatorių* $\gamma : \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \to \mathcal{C}(\Gamma)$ *galima pratęsti iki* $\gamma : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ *ir egzistuoja* $C = C(\Omega)$ *tokia, kad teisinga nelygybė*

$$\|\gamma v\|_{L_2(\Gamma)} \leq C\|v\|_1, \quad \forall v \in H^1(\bar{\Omega}).$$

Apibendrintų funkcijų savybės $\mathcal{C}^m$ erdvėse

2 teorema. *Tarkime, kad* $\Omega \in \mathcal{R}^d$ *yra aprėžta sritis, jos kontūras* Γ *glodus (arba sritis stačiakampė) ir* $k > d/2$*. Tada* $\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \subset H^k(\Omega)$ *ir egzistuoja* $C = C(\Omega)$ *tokia, kad teisinga nelygybė*

$$\|v\|_{\mathcal{C}} \leq C\|v\|_k, \quad \forall v \in H^k(\Omega).$$

$$\mathcal{C}^m(\bar{\Omega}) \subset H^k(\Omega), \quad k > m + d/2.$$

Funkcijų erdvės $H_0^1(\Omega)$ savybės

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \quad \gamma v = 0\}.$$

3 teorema. (Poincare nelygybė) *Tarkime, kad* $\Omega \in \mathcal{R}^d$ *yra aprėžta sritis. Tada egzistuoja* $C = C(\Omega)$ *tokia, kad teisinga nelygybė*

$$\|v\| \leq C\|\nabla v\|, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Erdvėje $H_0^1(\Omega)$ normą galime apibrėžti ir taip:

$$|v|_1 := \|\nabla v\|, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Šilumos laidumo lygtis

Nagrinėkime sritį $\Omega \subset \mathcal{R}^3$, kurios kontūras Γ.

Matematinį modelį užrašome nagrinėdami šilumos tvermės sąlygas laisvai pasirinktame poaibyje $\Omega_0 \subset \Omega$, kurio kontūras Γ_0.

$e(x,t)$ energijos **tankis**.

$\int_{\Omega_0} e\, dx$ **bendras** šilumos **kiekis**.

$j = j(x,t)$ šilumos **srautas**.

$\int_{\Gamma_0} j \cdot n\, ds$ **išeinantis** šilumos **kiekis per paviršių**.

$f = f(x,t)$ šilumos **šaltinio tankis**.

Energijos tvermės dėsnis:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} e dx = -\int_{\Gamma_0} j \cdot n \, ds + \int_{\Omega_0} p dx \, .$$

Panaudojame divergencijos teoremą, gauname:

$$\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot j - p \right) dx = 0, \quad t > 0.$$

Kadangi Ω_0 yra bet koks paibis, tai:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot j - p = 0, \quad t > 0.$$

$e = e_0 + \sigma T, \quad T$ – temperatūra.

$\sigma = \rho c$ specifinis šilumos talpumas.

$j = -\lambda \nabla T + ve$,
λ šilumos laidumas (difuzija)
$v = v(x,t)$ konvekcijos greitis

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma v T) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + p, \quad t > 0.$$

Pradinė sąlyga:

$$T(x,0) = T_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Kraštinės sąlygos:

1. Pirmojo tipo (Dirichlet)

$$T(x,t) = T_a, \quad x \in \Gamma_D, \ \ t > 0.$$

Tarsime, kad $v \cdot n = 0$.

2. Antrojo tipo (Neumann)

$$\frac{\partial T}{\partial n}(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma_N, \ \ t > 0.$$

3. Trečiojo tipo (Robin)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}(x,t) + \beta(T(x,t) - T_a) = 0, \ \ x \in \Gamma_R, \ t > 0.$$

Variacinis uždavinio formulavimas

Nagrinėkime vienmatį, elipsinį kraštinį uždavinį

$$\begin{cases} \mathcal{A}u := -(au')' + bu' + cu = f, \; x \in \Omega = (0,1) \\ u(0) = 0, \;\; u(1) = 0. \end{cases}$$

Dauginame lygtį skaliariškai iš $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$:

$$\int_0^1 (-(au')' + bu' + cu)\varphi dx = \int_0^1 f\varphi dx,$$

arba, suintegravus dalimis,

$$\int_0^1 (au'\varphi' + bu'\varphi + cu\varphi) dx = \int_0^1 f\varphi dx, \; \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega).$$

Apibrėžkime kvadratinę formą

$$a(v, w) = \int_0^1 (av'w' + bv'w + cvw)dx,$$

ir tiesinį funkcionalą

$$L(w) = (f, w).$$

Variacinis, arba silpnasis uždavinio formulavimas:
rasti silpnąjį sprendinį $u \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Jei $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, tai silpnasis sprendinys sutampa su klasikiniu sprendiniu (integruojame dalimis ir pasinaudojame erdvės H_0^1 savybėmis)

$$\int_0^1 (\mathcal{A}u - f)\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1.$$

Lygybės

$$\int_0^1 (\mathcal{A}u - f)\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1$$

yra teisingos ir kai $u \in H^2 \cap H_0^1$, tokį sprendinį vadiname stipriu.

Nagrinėkime atvejį $b = 0$.

Reikia rasti $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

$f \in L_2(\Omega)$,

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad c(x) \geq 0, \;\; x \in \bar{\Omega},$$

o kvadratinė forma:

$$a(v, w) = \int_0^1 (av'w' + cvw)dx.$$

Riesz teorema. *Tegul* V *yra Hilberto erdvė, ir* $(\cdot, \cdot)$ *yra jos skaliarinė sandauga. Kiekvienam aprėžtam funkcionalui* L*, apibrėžtam šioje erdvėje, egzistuoja vienintelis* $u \in V$ *toks, kad teisinga lygybė*

$$L(v) = (u, v), \quad \forall v \in V.$$

Mūsų atveju turime erdvę H_0^1 ir normą

$$|v|_1 = \int_0^1 (v')^2 dx.$$

Kvadratinė forma tenkina eliptiškumo sąlygą:

$$a(v,v) = \int_0^1 (a(v')^2 + cv^2) dx \geq a_0 |v|_1^2, \ \forall v \in H_0^1$$

ir yra simetrinė, t.y. $\forall v, w \in H_0^1$:

$$a(v,w) = \int_0^1 (av'w' + cvw) dx = a(w,v).$$

Taigi $a(v,w)$ apibrėžia naują skaliarinę sandaugą ir normą

$$\|v\|_a^2 = a(v,v).$$

Parodysime, kad tiesinis funkcionalas $L(v) = (f, v)$ yra aprėžtas naujos normos atžvilgiu.

Pagal apibrėžimą

$$\|L\|_{H^{-1}} = \sup_{v \in H_0^1} \frac{|L(v)|}{\|v\|_a}$$

$$\begin{aligned} |L(v)| = |(f, v)| \le \|f\| \, \|v\| &\le C\|f\| \, |v|_1 \\ &\le \frac{C}{\sqrt{a_0}} \|f\| \, \|v\|_a. \end{aligned}$$

Taigi

$$\|L\|_{H^{-1}} \le \frac{C}{\sqrt{a_0}} \|f\|.$$

Tada egzistuoja vienintelis $u \in H_0^1(\Omega)$, kad

$$L(v) = (u, v)_a = a(u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Įrodome sprendinio stabilumo įvertį pagrindinėje H_0^1 normoje

$$a_0 |u|_1^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq C\|f\| \, |u|_1$$
$$\Rightarrow \qquad |u|_1 \leq \frac{C}{a_0} \|f\|.$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^1 \Big(a(\varphi')^2 + c\varphi^2 \Big) dx - \int_0^1 f \varphi \, dx,$$
$$F(\varphi) \to \min, \quad \forall \varphi \in H_0^1.$$

Nagrinėkime atvejį $b \neq 0$.

Reikia rasti $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, \varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

$f \in L_2(\Omega)$,

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad c(x) - \frac{1}{2} b'(x) \geq 0, \;\; x \in \bar{\Omega},$$

o kvadratinė forma:

$$a(v, w) = \int_0^1 (a v' w' + b v' w + c v w) \, dx.$$

Lax-Milgram teorema. *Tegul* V *yra Hilberto erdvė. Jeigu kvadratinė forma* $a(\cdot, \cdot)$ *yra aprėžta iš viršaus ir tenkina eliptiškumo sąlygą, tai kiekvienam aprėžtam funkcionalui* L *egzistuoja vienintelis* $u \in V$ *toks, kad teisinga lygybė*

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V$$

ir teisingas stabilumo įvertis

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|L\|_{V^*}.$$

Mūsų atveju turime erdvę H_0^1 ir normą

$$|v|_1 = \int_0^1 (v')^2 dx.$$

Kvadratinė forma tenkina eliptiškumo sąlygą:

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \int_0^1 (a(v')^2 + bv'v + cv^2)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}bv^2\right]_0^1 + \int_0^1 \left(a(v')^2 + (c - \frac{1}{2}b')v^2\right)dx \\
&\geq a_0|v|_1^2, \ \forall v \in H_0^1
\end{aligned}$$

Kvadratinė forma aprėžta:

$$
\begin{aligned}
a(v,w) &= \int_0^1 \Big(av'w' + bv'w + cvw \Big) dx \\
&\le C_a |v|_1 \, |w|_1 + C_b |v|_1 \, \|w\| + C_c \|v\| \, \|w\| \\
&\le C \, |v|_1 \, |w|_1, \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Tada egzistuoja vienintelis $u \in H_0^1(\Omega)$ toks, kad teisinga lygybė

$$
a(u,\varphi) = L(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)
$$

ir teisingas stabilumo įvertis

$$
|u|_1 \le \frac{C}{a_0} \, \|f\|.
$$

Sprendinio glodumas

Tarkime, kad a, b, c yra glodžios funkcijos.

$$au'' = -f + (b - a')u' + cu \in L_2(\Omega) \;\Rightarrow\; u \in H^2.$$

Taigi $u \in H^2$ yra stiprus sprendinys.

Gauname įvertį:

$$\begin{aligned} a_0\|u''\| \le \|au''\| &\le \|f\| + \|(b - a')u'\| + \|cu\| \\ &\le \|f\| + C|u|_1 \le C\|f\|. \end{aligned}$$

Todėl teisingas stabilumo įvertis:

$$\|u\|_2^2 = \|u''\|^2 + \|u'\|^2 + \|u\|^2 \le C\|f\|^2.$$

Jei a nėra glodi ar $f \in H^{-1}$, tai egzistuoja $u \in H_0^1$, u yra silpnasis sprendinys, bet $u \notin H^2$.

$$a_0|u|_1^2 \le a(u,u) = (f,u) \le \|f\|_{H^{-1}} |u|_1$$

$$|u|_1 \le C\|f\|_{H^{-1}}.$$

Imkime $f(x) = 1/x$ ir spręskime uždavinį:

$$a(u, \varphi) = \int_0^1 u' \varphi' \, dx = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Funkcija $f \notin L_2(\Omega)$. Parodysime, kad $f \in H^{-1}(\Omega)$.

$$|(f, v)| = \left| \int_0^1 \frac{v(x)}{x} \, dx \right| = \left| \int_0^1 v(x) \, d \ln x \right|$$
$$= \left| \int_0^1 \ln x \, v'(x) \, dx \right| \leq C \, \|v'\|.$$

$$u(x) = -x \ln x.$$

Nesunku patikrinti, kad $u \in H_0^1$, bet $u \notin H^2$.