Skaičiavimo metodų ir matematinio modeliavimo seminaras Nr. 14 (101)

Matematinės fizikos uždaviniai: specialieji skyriai. 3

Raimondas ČIEGIS

Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas,

Saulėtekio al. 11, Vilnius, Lietuva

e-mail: rc@fm.vgtu.lt

Apibendrinta išvestinė

Tiesinis funkcionalas, kuris pasako, kaip apibendrintoji išvestinė "veikia" glodžias funkcijas:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(\phi) = -\int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega).$$

(Funkcijoms $v \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$ egzistuoja $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, kad $\bar{\Omega}_1$ yra kompaktas ir $v = 0$, kai $x \in \Omega / \bar{\Omega}_1$)

Egzistuoja $w \in L_2(\Omega)$ toks, kad:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(\phi) = (w, \phi), \quad \forall \phi \in L_2.$$

Tada apibrėžiame funkciją

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$$

tokią, kad

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \phi\, dx = -\int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega).$$

Ar apibendrintoms išvestinėms galioja lygybės

$$\Big(c_1u(x) + c_2v(x)\Big)' = c_1u'(x) + c_2v'(x),$$
$$u', v' \in L_2(\Omega),$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad u', v' \in L_2(\Omega)?$$

Aukštesnės eilės apibendrintosios išvestinės yra tiesiniai funkcionalai

$$D^\alpha v(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v D^\alpha \phi \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Tada apibrėžiame funkciją

$$D^\alpha v \in L_2(\Omega)$$

tokią, kad

$$\int_\Omega D^\alpha v \, \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v D^\alpha \phi \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Sobolevo erdvės

1. Hilberto erdvės $H^k(\Omega)$

$$H^k = H^k(\Omega) = \{v \in L_2 : \quad D^\alpha v \in L_2, \quad |\alpha| \le k\}.$$

Jos skaliarinė sandauga

$$(v, w)_k = (v, w)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha v \, D^\alpha v \, dx$$

ir norma

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = (v, v)_k^{1/2}.$$

Atskiras atvejis $\|v\|_0 = \|v\|_{L_2}$.

$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $H^k(\Omega)$.

Erdvės $H^k(\Omega)$ funkcijos gali būti gautos nagrinėjant glodžių funkcijų sekų $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$, $v_j \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ ribas normoje:

$$\|v\|_{C^k} = (v, v)_{C^k}^{1/2}, \quad v \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}),$$

$$(v, w)_{C^k} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha v \, D^\alpha v \, dx.$$

Funkcijų erdvė $H_0^k(\Omega)$

Erdvės $H_0^k(\Omega)$ funkcijas gauname nagrinėdami glodžių funkcijų sekų $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$, $v_j \in \mathcal{C}_0^k(\Omega)$ ribas normoje:

$$\|v\|_{C^k} = (v,v)_{C^k}^{1/2}, \quad v \in \mathcal{C}^k(\Omega),$$

$H_0^1(\Omega)$ dualioji erdvė $(H_0^1)^* = H^{-1}(\Omega)$ yra erdvė tiesinių, aprėžtų funkcionalų, apibrėžtų funkcijoms $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\|L\|_{-1} = \sup_{v \in H_0^1} \frac{|L(v)|}{\|v\|_1}.$$

Pavyzdžiai

1. Tegul

$$\Omega = \{x \in \mathcal{R}^d,\ d = 1,2,3 : \quad |x| < 1\}.$$

Kada funkcija $v(x) = |x|^p$ priklauso
(*a*) $L_2(\Omega)$, (*b*) $H^1(\Omega)$?

$$d = 1$$

a)

$$\int_{-1}^{1} \left(|x|^p\right)^2 dx = 2\int_0^1 x^{2p}\, dx = 2\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\Big|_0^1$$

$$2p + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad p > -0.5,$$

$$p = -0.5 \quad \Rightarrow \quad 2\int_0^1 \frac{dx}{x} = 2 \ln x\Big|_0^1 = \infty.$$

$$v \in L_2(\Omega, d = 1), \quad \text{kai } \ p > -\frac{1}{2}.$$

b) Rasime funkcijos $v(x)$ apibendrintąją išvestinę, kuri turi priklausyti $L_2(\Omega)$. Pagal apibrėžimą: imsime $\phi \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_{-1}^{1} |x|^p \frac{d\phi}{dx}\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)^p \frac{d\phi}{dx}\, dx + \int_{0}^{1} x^p \frac{d\phi}{dx}\, dx$$
$$= -\int_{-1}^{0} p(-x)^{p-1}\, \phi(x)\, dx + \int_{0}^{1} px^{p-1}\, \phi(x)\, dx$$

taigi

$$g(x) := v'(x) = \begin{cases} -p(-x)^{p-1}, & \text{kai } x < 0, \\ px^{p-1}, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} g^2(x)\,dx = 2p^2 \int_0^1 x^{2p-2}\,dx = 2p^2 \frac{x^{2p-1}}{2p-1}\Big|_0^1$$

$$2p-1>0 \quad \Rightarrow \quad p>0.5,$$

$$p=0.5 \quad \Rightarrow \quad 2\int_0^1 \frac{dx}{x} = 2\ln x\Big|_0^1 = \infty.$$

$$v \in H^1(\Omega, d=1), \quad \text{kai} \;\; p > \frac{1}{2}.$$

2. Tegul

$$\Omega = \{x \in \mathcal{R}^2, \quad |x| < \frac{1}{2}\}.$$

Ar funkcija $v(x) = \log(-\log|x|^2) \in H^1(\Omega)$?

Ar $v \in H^1(\Omega)$ būtinai tolydžios ir aprėžtos?

$H^1(\Omega)$ funkcijų pratęsimas

Jei $v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, tai ši funkcija yra vienareikšmiškai apibrėžta ant srities kontūro $\Gamma = \partial\Omega$:

$$(\gamma v)(x) = v(x), \quad x \in \Gamma.$$

Γ yra nulinio mato aibė, todėl γv nėra korektiškai apibrėžta, jei $v \in L_2(\Omega)$.

Tarkime, kad $v \in H^1(\Omega)$, ar galima taip apibrėžti funkcijos pėdsaką γv, kad galiotų įvertis

$$\|\gamma v\|_{(\Gamma)} \leq \|v\|_1, \quad \forall v \in \mathcal{C}^1(\Omega).$$

Toks pėdsako operatorius γv apibendrinamas visoms $v \in H^1(\Omega)$ pasinaudojant erdvės $\mathcal{C}^1(\Omega)$ tirštumu erdvėje $H^1(\Omega)$.

1 lema. *Tarkime, kad* $\Omega = (0, 1)$*. Tada egzistuoja tokia konstanta* C*, kad teisinga nelygybė*

$$|v(x)| \leq C\|v\|_1, \quad \forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}).$$

Įrodymas. Imkime $x, y \in \Omega$, tada teisinga lygybė

$$v(x) = v(y) + \int_x^y v'(s)\, ds.$$

Pasinaudoję Cauchy-Schwarz nelygybe, gauname įvertį

$$|v(x)| \leq |v(y)| + \int_x^y |v'(s)|\, ds \leq |v(y)| + \|v'\|,$$

$$\begin{aligned} |v(x)|^2 &\leq |v(y)|^2 + 2|v(y)|\, \|v'\| + \|v'\|^2 \\ &\leq 2|v(y)|^2 + 2\|v'\|^2. \end{aligned}$$

Integruojame pagal y intervale $(0, 1)$:

$$|v(x)|^2 \leq 2(\|v\|^2 + \|v'\|^2) = 2\|v\|_1^2.$$

1 teorema. *Tarkime, kad* $\Omega \in \mathcal{R}^d$ $(d \geq 2)$ *yra aprėžta sritis, jos kontūras* Γ *glodus (arba sritis stačiakampė). Tada operatorių* $\gamma : \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \to \mathcal{C}(\Gamma)$ *galima pratęsti iki* $\gamma : H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$ *ir egzistuoja* $C = C(\Omega)$ *tokia, kad teisinga nelygybė*

$$\|\gamma v\|_{L_2(\Gamma)} \leq C\|v\|_1, \quad \forall v \in H^1(\bar{\Omega}).$$

Įrodymas. Pirmiausia įrodome šį įvertį $\forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$

$$\|\gamma v\|_{L_2(\Gamma)} \leq C\|v\|_1, \quad \forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}).$$

Tada imkime $v \in H^1(\bar{\Omega})$. Egzistuoja funkcijų seka $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ tokia, kad $\|v - v_j\|_1 \to 0$. Konverguojanti seka yra Košy seka ($H^1(\Omega)$ yra pilna erdvė), todėl

$$\|v_i - v_j\|_1 \to 0, \quad i, j \to \infty.$$

Tada teisinga nelygybė

$$\|\gamma v_i - \gamma v_j\|_{L_2(\Gamma)} \leq C\|v_i - v_j\|_1 \to 0, \quad i, j \to \infty.$$

Taigi $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ yra Košy seka erdvėje $L_2(\Gamma)$, todėl egzistuoja $w \in L_2(\Gamma)$:

$$\|\gamma v_j - w\|_{L_2(\Gamma)} \to 0 \quad j \to \infty.$$

Apibrėžiame $\gamma v = w$.

Lieka įrodyti, kad tokiai funkcijai galioja stabilumo įvertis. Kadangi $v_j \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, tai:

$$\|\gamma v_j\|_{L_2(\Gamma)} \leq C\|v_j\|_1.$$

Pereiname prie ribos, kai $j \to \infty$ ir gauname reikalingą įvertį.

Taigi apibrėžėme aprėžtą tiesinį operatorių

$$\gamma : \quad H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma).$$

Kadangi $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ tiršta erdvėje $H^1(\Omega)$, tai toks pratęsimas yra vienintelis. $\square$

Apibendrintų funkcijų savybės $\mathcal{C}^m$ erdvėse

2 teorema. *Tarkime, kad* $\Omega \in \mathcal{R}^d$ *yra aprėžta sritis, jos kontūras* Γ *glodus (arba sritis stačiakampė) ir* $k > d/2$. *Tada* $\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \subset H^k(\Omega)$ *ir egzistuoja* $C = C(\Omega)$ *tokia, kad teisinga nelygybė*

$$\|v\|_{\mathcal{C}} \leq C\|v\|_k, \quad \forall v \in H^k(\Omega).$$

Analogiškai gauname, kad

$$\mathcal{C}^m(\bar{\Omega}) \subset H^k(\Omega), \quad k > m + d/2.$$

Funkcijų erdvės $H_0^1(\Omega)$ savybės

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \ \ \gamma v = 0\}.$$

3 teorema. (Poincare nelygybė) *Tarkime, kad* $\Omega \in \mathcal{R}^d$ *yra aprėžta sritis. Tada egzistuoja* $C = C(\Omega)$ *tokia, kad teisinga nelygybė*

$$\|v\| \le C\|\nabla v\|, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Teoremą įrodome funkcijoms $v \in \mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$ ir pasinaudojame šios erdvės tirštumu ervėje $H_0^1(\Omega)$.

Taigi erdvėje $H_0^1(\Omega)$ yra ekvivalenčios norma $\|\cdot\|_1$ ir pusnormė $|\cdot|_1$ **(įrodykite)**

$$|v|_1 := \|\nabla v\|, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Erdvės H^{-1} savybės

Palyginsime erdves $L_2(\Omega)$ ir $H^{-1}(\Omega)$.

1. Imkime $f \in L_2(\Omega)$, apibrėžkime tiesinį funkcionalą:

$$f(v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Parodysime, kad tada $\|f\|_{-1} \leq C$.

Pagal normos apibrėžimą

$$\|f\|_{-1} = \sup_{v \in H_0^1} \frac{|f(v)|}{|v|_1}.$$

Nesunku įrodyti, kad (prisiminkite Poincare nelygybę):

$$|f(v)| = |(f, v)| \leq \|f\| \, \|v\| \leq C\|f\| \, |v|_1.$$

Taigi

$$\|f\|_{-1} \leq C\|f\|, \quad \forall f \in L_2(\Omega).$$

Įrodėme, kad $L_2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

2. Imkime $\Omega = (0,1)$ ir $f(x) = 1/\sqrt{x}$. Tokia funkcija $f \notin L_2(\Omega)$.

Apibrėžkime tiesinį funkcionalą:

$$f(v) = (f, v) = \int_0^1 \frac{v(x)}{\sqrt{x}}\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tada

$$|(f,v)| = \left| \int_0^1 \frac{v(x)}{\sqrt{x}}\, dx \right| = 2 \left| \int_0^1 v(x)\, d\sqrt{x} \right|$$

$$= 2 \left| \int_0^1 \sqrt{x} v'(x)\, dx \right| \le \|v'\|.$$

Taigi $f \in H^1(\Omega)$, todėl $H^1(\Omega) \not\subset L_2(\Omega)$.