Skaičiavimo metodų ir matematinio modeliavimo

seminaras Nr. 13 (100)

Matematinės fizikos uždaviniai: specialieji skyriai. 2

Raimondas ČIEGIS

Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas,

Saulėtekio al. 11, Vilnius, Lietuva

e-mail: rc@fm.vgtu.lt

Funkcijų erdvės $\mathcal{C}^k$

Tarkime, kad $M \subset \mathcal{R}^d$.

$\mathcal{C}(M)$ yra tiesinė erdvė tolydžių funkcijų, apibrėžtų M.

$\mathcal{C}(M)$ poerdvis, sudarytas iš aprėžtų funkcijų, apibrėžia normuotą tiesinę erdvę, kurios norma

$$\|v\|_{\mathcal{C}(M)} = \sup_{x \in M} |v(x)|.$$

Kai M yra aprėžta ir uždara aibė, tai supremumas yra pasiekiamas:

$$\|v\|_{\mathcal{C}(M)} = \max_{x \in M} |v(x)|.$$

Išvada

Konvergavimas $\mathcal{C}(M) \longrightarrow$
tolygus konvergavimas $\longrightarrow$ *tolydžių funkcijų seka konverguoja į tolydžią funkciją* $\longrightarrow$
$\mathcal{C}(M)$ *yra pilna erdvė, t.y. Banacho erdvė*.

Tegul $\Omega \in \mathcal{R}$ yra jungi, atvira aibė (sritis).

$\forall k \geq 0$ apibrėžiame tiesinę funkcijų erdvę $\mathcal{C}^k(\Omega)$, kuriai priklauso k kartų tolydžiai diferencijuojamos srityje Ω funkcijos.

$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}^k(\Omega)$:

$$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega}) = \{v : \quad D^\alpha v \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}), \quad \forall \alpha \leq k\}.$$

Čia pažymėjome

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i.$$

Ši erdvė yra Banacho erdvė, jos norma

$$\|v\|_{\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})}.$$

L_p erdvės

Tegul $\Omega \subset \mathcal{R}^d$ yra sritis.

Imkime $v \geq 0$, apibrėžtą srityje Ω, ir nagrinėkime integralą (pvz. Lebego prasme):

$$I_\Omega(v) = \int_\Omega v(x)\, dx.$$

Funkcija v yra integruojama srytyje Ω, jei

$$I_\Omega(v) \leq \infty.$$

Pakeitus funkcijos reikšmes nulinio mato aibėje $|\Omega_0| = 0$, integralo $I_\Omega(v)$ reikšmė nesikeičia.

Pavyzdžiai

1. Nagrinėkime dvi funkcijas:

$$v_1(x) = 1, \quad x \in \Omega,$$

$$v_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega / \{x_0 \in \Omega\} \\ 2, & x = x_0. \end{cases}$$

Tada teisinga lygybė

$$I_\Omega(v_1) = I_\Omega(v_2).$$

2. Srities Ω kontūras (paviršius) yra nulinio mato aibė, todėl

$$I_\Omega(v) = I_{\bar{\Omega}}(v).$$

Imkime normą

$$\|v\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |v(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Tada $v \in L_p = L_p(\Omega)$, jei $\|v\|_{L_p} < \infty$.

Svarbu:

$\|v_2\|_{L_\infty} = 1$, nors $\sup_\Omega v_2 = 2$.

L_p yra pilna, normuota erdvė (Banacho erdvė).

Ryšys tarp $L_p(\Omega)$ ir $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ erdvių

1. $\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \subset L_p(\Omega)$

$$\|v\|_{L_p} \le C\|v\|_{\mathcal{C}}, \quad C = |\Omega|^{1/p}, \;\; 1 \le p < \infty,$$

$$\|v\|_{L_\infty} = \|v\|_{\mathcal{C}}.$$

2. $L_p(\Omega) \not\subset \mathcal{C}(\bar{\Omega})$

$$v(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

3. **Teorema**. $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ *nėra pilna erdvėje* $L_p(\Omega)$*,*
$1 \le p < \infty$*.*

Įrodymas. Imkime seką funkcijų $\{v_j(x) \in \mathcal{C}([0,1])\}$:

$$v_j(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ (j+1)x, & 0 < x \le \frac{1}{j+1}, \\ 1, & \frac{1}{j+1} < x \le 1. \end{cases}$$

Nesunku patikrinti, kad $\{v_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ yra Košy seka erdvėje L_p, nes:

$$\|v_i - v_j\|_{L_p} \le \min\left(\frac{1}{(j+1)^{1/p}}, \frac{1}{(i+1)^{1/p}}\right).$$

Tačiau $v_j \to v$, kai $j \to \infty$, o v yra trūki funkcija. $\square$

$\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ yra tirštas erdvės $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ poerdvis.

$\forall v \in L_p$ egzistuoja seka $\{v_i \in \mathcal{C}\}_{i=1}^{\infty}$, tokia kad $\|v_i - v\|_{L_p} \longrightarrow 0$, kai $i \longrightarrow \infty$.

$\mathcal{C}_0^k(\bar{\Omega})$ yra tirštas erdvės $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ poerdvis.

$\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ nėra tirštas erdvės $L_\infty(\Omega)$ poerdvis. (kodėl?)

Sobolevo erdvės

Šios Hilberto erdvės ir yra daugelio matematinės fizikos uždavinių "gimtosios" erdvės, ten gyvena jų sprendiniai.

Apibendrinta išvestinė

Jei $v \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, tai teisinga integravimo dalimis formulė

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \phi \, dx = - \int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega).$$

Kaip apibrėžti išvestinę, jei $v \in L_2(\Omega)$? Klasikinė išvestinė egzistuoja ne visoms tokioms funkcijoms.

Apibrėžiame tiesinį funkcionalą, kuris pasako, kaip apibendrintoji išvestinė "veikia" glodžias funkcijas:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(\phi) = -\int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega).$$

Toks funkcionalas ir vadinamas apibendrinta arba silpna (angl. weak derivative) funkcijos v išvestine.

Jeigu šis funkcionalas yra aprėžtas erdvėje $L_2(\Omega)$, t.y., remiantis, kad $\mathcal{C}_0^1(\Omega)$ yra tiršta erdvėje $L_2(\Omega)$:

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L_2^*} = \sup_{\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i}(\phi) \right| / \|\phi\|_{L_2} < \infty,$$

iš Riesz teoremos gauname, kad egzistuoja vienintelis $w \in L_2$, toks kad teisinga lygybė

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(\phi) = (w, \phi), \quad \forall \phi \in L_2.$$

Tada sakysime, kad silpnoji išvestinė priklauso L_2 ir žymėsime $\partial v/\partial x_i = w$.

Tokiu atveju teisinga integravimo dalimis formulė

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \phi \, dx = - \int_\Omega v \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega).$$

Analogiškai apibrėžiame aukštesnės eilės apibendrintas išvestines, kurios yra tiesiniai funkcionalai

$$D^\alpha v(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v D^\alpha \phi \, dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Pavyzdys.

Duota funkcija, apibrėžta srityje $\Omega = (-1, 1)$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Reikia rasti šios funkcijos apibendrintas (silpnas) išvestines f' ir f''.

$f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, bet $f \notin \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$.

Apskaičiuosime f' remdamiesi apibrėžimu.

Sudarome tiesinį funkcionalą ($\forall \phi \in C_0^1(\Omega)$):

$$f'(\phi) = -\int_{-1}^{1} f\phi'\,dx = -\int_{0}^{1} x\phi'(x)\,dx$$

$$= -x\phi(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \phi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g\phi\,dx,$$

čia pažymėjome funkciją

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Taigi $f' = g$, nesunku patikrinti, kad $g \in L_2(\Omega)$.

Apskaičiuosime $f'' = g'$ remdamiesi apibrėžimu.

Sudarome tiesinį funkcionalą ($\forall \phi \in C_0^1(\Omega)$):

$$g'(\phi) = -\int_{-1}^{1} g\phi'\,dx = -\int_{0}^{1} \phi'(x)\,dx$$
$$= -\phi(x)\Big|_0^1 = \phi(0).$$

Taigi $g' = \delta$ (t.y. Dirako delta funkcionalas):

$$\delta(\phi) = \phi(0), \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Įsitikinsime, kad $\delta \notin L_2(\Omega)$.

Reikia įrodyti, kad toks tiesinis funkcionalas yra neaprėžtas L_2 normoje:

$$\|\delta\|_{L_2} = \frac{|\delta(\phi)|}{\|\phi\|_{L_2}} = \frac{|\phi(0)|}{\|\phi\|_{L_2}}.$$

Užtenka surasti funkcijų seką $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$, kad

$$\|\phi_i\|_{L_2} \to 0, \quad \text{bet} \quad \phi_i(0) = 1, \quad \text{kai} \quad i \to \infty.$$

Imkime funkcijas

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1, & -1/i \le x \le 1/i, \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$$

Tada $\|\phi_i\|_{L_2} = \sqrt{2/i} \to 0$, kai $i \to \infty$.

Sobolevo erdvė

$$H^k = H^k(\Omega) = \{v \in L_2 : \quad D^\alpha v \in L_2, \quad |\alpha| \le k\},$$

jos skaliarinė sandauga

$$(v, w)_k = (v, w)_{H^k} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha v \, D^\alpha v \, dx$$

ir norma

$$\|v\|_k = \|v\|_{H^k} = (v, v)_k^{1/2}.$$

Uždavinys. Užrašykite normų $\|v\|_1$ ir $\|v\|_2$ išreikštines formules.

$\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ yra tiršta erdvėje $H^k(\Omega)$!