Skaičiavimo metodų ir matematinio modeliavimo

seminaras Nr. 12 (99)

Matematinės fizikos uždaviniai: specialieji skyriai. 1

Raimondas ČIEGIS

Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas,

Saulėtekio al. 11, Vilnius, Lietuva

e-mail: rc@fm.vgtu.lt

Uždaviniai:

1. Matematinių modelių sudarymas

(kraštiniai-pradiniai uždaviniai dalinėmis išvestinėmis)

2. Sprendinio egzistavimas, vienatis

3. Sprendinio stabilumas duomenų atžvilgiu

(nekorektiški uždaviniai)

Metodai:

1. Energetinis metodas (Sobolevo normos)

   - apibendrintosios funkcijos,

   - silpnasis uždavinio formulavimas

2. Maksimumo principas (C -norma)

3. Furjė metodas (L_2 -norma)

Literatūra:

Stig Larsson, Vidar Thomee. "Partial Differential Equations with Numerical Methods", Springer, 2003

(MMK biblioteka)

Tiesinės erdvės

V yra tiesinė erdvė:

$$u, v \in V, \lambda, \quad \mu \in \mathcal{R}, \quad \text{tai} \quad \lambda u + \mu v \in V.$$

$L : V \to \mathcal{R}$ yra tiesinis funkcionalas, apibrėžtas ervėje V, jei

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v),$$
$$\forall u, v \in V, \quad \lambda, \mu \in \mathcal{R}.$$

Pavyzdys.

(u, v) – skaliarinė sandauga, $u, v \in V$.

$$L(v) = (u, v), \quad \forall v \in V.$$

$a(\cdot,\cdot)$ yra bitiesinė forma, jei $a : V \times V \rightarrow \mathcal{R}$ yra tiesinė abiejų argumentų funkcija, t.y $\forall u, v, w \in V$:

$$a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w),$$
$$a(w, \lambda u + \mu v) = \lambda a(w, u) + \mu a(w, v).$$

$a(\cdot,\cdot)$ yra simetrinė, jei

$$a(u, v) = a(v, u), \quad u, v \in V,$$

ir teigiamai apibrėžta, jei

$$a(v, v) > 0, \quad v \in V, \ \ v \neq 0.$$

Teigiamai apibrėžta, simetrinė bitiesinė forma vadinama skaliarine sandauga.

Pavyzdys.

$u, v \in \mathcal{R}^n$ - vektoriai, A yra $n \times n$ dydžio matrica, (u, v) vektorių skaliarinė sandauga

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Tada apibrėžiame bitiesinę formą:

$$a(u, v) = (Au, v), \quad \forall u, v \in \mathcal{R}^n.$$

1. Kada ši forma simetrinė?

2. Kada ši forma teigiamai apibrėžta?

Pavyzdys.

$u(x), v(x) \in C^1[0,1]$ – funkcijos, $k(x) > 0$.
(u,v) skaliarinė sandauga

$$(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx.$$

Tada apibrėžiame bitiesinę formą:

$$a(u,v) = \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x)\,dx.$$

1. Kada ši forma simetrinė?

2. Kada ši forma teigiamai apibrėžta?

Pilnosios tiesinės erdvės

V yra tiesinė erdvė. Seka $\{v_i \in V\}_{i=1}^{\infty}$ yra Košy seka, jei

$$\|v_i - v_j\| \to 0, \quad i, j \to \infty.$$

V yra pilna, jei kiekviena jos Košy seka konverguoja ir

$$v = \lim_{i \to \infty} v_i \in V.$$

Pilnoji tiesinė erdvė, kurios normą generuoja skaliarinė sandauga, vadinama Hilberto erdve.

Projekcija

V yra Hilberto erdvė.
Tegul $V_0 \subset V$ yra jos uždaras tiesinis poerdvis
(įrodykite, kad V_0 irgi yra Hilberto erdvė!).

Tada bet kokį $v \in V$ galime vieninteliu būdu išreikšti suma

$$v = v_0 + w, \quad v_0 \in V_0, \quad (w, u) = 0 \;\; \forall u \in V_0.$$

v_0 vadinamas elemento v ortogonalia projekcija į V_0 ir žymimas $P_{V_0} v$.

Šį elementą galime rasti spręsdami uždavinį

$$\|v - v_0\| = \min_{w \in V_0} \|v - w\|.$$

Aprėžti operatoriai

Tegul V, W yra dvi Hilberto erdvės.

Tiesinis operatorius $B: V \to W$ yra aprėžtas (iš viršaus), jei egzistuoja konstanta C, tokia kad

$$\|Bv\|_W \leq C\|v\|_V, \quad \forall v \in V.$$

Operatoriaus B normą apibrėžiame taip

$$\|B\| = \sup_{v \in V} \frac{\|Bv\|_W}{\|v\|_V}.$$

Teisingas įvertis

$$\|Bv\|_W \leq \|B\| \, \|v\|_V.$$

1. Įrodykite, kad aprėžtas tiesinis operatorius yra tolydus.

Dualioji tiesinė erdvė

Pažymėkime tiesinių, aprėžtų funkcionalų, apibrėžtų Hilberto erdvėje V, aibę V^*. Ji vadinama erdvės V dualiaja erdve.

Funkcionalo L normą apibrėžiame taip

$$\|L\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{|L(v)|}{\|v\|_V}.$$

Pavyzdys.

Duotas $u \in V$. Nagrinėkime funkcionalą:

$$L(v) = (u, v), \quad \forall v \in V.$$

1. Ar L aprėžtas funkcionalas?

2. Apskaičiuokite $\|L\|_{V^*}$.

Dualioji erdvė V^* irgi yra tiesinė erdvė.

Imkime du funkcionalus $L, M \in V^*$ ir $\lambda, \mu \in \mathcal{R}$:

$$(\lambda L + \mu M)(v) = \lambda L(v) + \mu M(v).$$

Nesunku įrodyti, kad V^* yra pilna, todėl ji yra Banacho erdvė.

Riesz teorema. *Tegul V yra Hilberto erdvė, ir $(\cdot, \cdot)$ yra jos skaliarinė sandauga. Kiekvienam aprėžtam funkcionalui L, apibrėžtam šioje erdvėje, egzistuoja vienintelis $u \in V$ toks, kad teisinga lygybė*

$$L(v) = (u, v), \quad \forall v \in V.$$

Taigi Hilberto erdvės atveju V^* yra ekvivalenti V.

Vienatis. Tarkime, kad egzistuoja du sprendiniai $u_1, u_2 \in V$, tada

$$(u_1, v) = (u_2, v), \quad \forall v \in V.$$

Imkime $v = u_1 - u_2$, gauname lygybę

$$\|u_1 - u_2\|^2 = (u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$$
$$\Rightarrow u_1 - u_2 = 0.$$

Egzistvimas.

a) Jei $L(v) = 0, \forall v \in V$, tai galime imti $u = 0$.

b) Tarkime, kad $L(\bar{v}) \neq 0, \bar{v} \in V$. Nagrinėkime aibę:

$$V_0 = \{v \in V : \quad L(v) = 0\}.$$

Nesunku įrodyti (įrodykite), kad

- $V_0 \subset V$
- V_0 yra uždara aibė.

Tada $\bar{v} = v_0 + w$, čia $v_0 \in V_0$ ir w ortogonalus V_0.

$$L(w) = L(\bar{v}) - L(v_0) = L(\bar{v}) \neq 0.$$

Teisinga lygybė

$$L\left(v - w\frac{L(v)}{L(w)}\right) = 0.$$

Reiškia

$$v - w\frac{L(v)}{L(w)} \in V_0 \;\Rightarrow \left(v - w\frac{L(v)}{L(w)}, w\right) = 0.$$

Taigi gauname lygybę

$$(v, w) = L(v)\frac{\|w\|^2}{L(w)} \;\;\Rightarrow\;\; u = w\frac{L(w)}{\|w\|^2}.$$

□

Pavyzdys

Spręskime uždavinį: reikia rasti $u \in V$, tokį kad

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V,$$

V yra Hilberto erdvė,
L aprėžtas tiesinis funkcionalas,
$a(\cdot, \cdot)$ simetrinė bitiesinė forma, kuri elipsinė (angl. *coercive*):

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \ \ \forall v \in V, \ \ \alpha > 0.$$

Tada $a(\cdot, \cdot)$ apibrėžia naują skaliarinę sandaugą. Iš Riesz'o teoremos gauname, kad egzistuoja vienintelis $u \in V$, toks kad

$$L(v) = a(u, v), \quad \forall v \in V.$$

Taigi šis elementas u ir yra uždavinio sprendinys.

Sprendinio stabilumo analizė

$$\alpha\|u\|_V^2 \le a(u,u) = L(u) \le \|L\|_{V^*}\,\|u\|_V$$
$$\Rightarrow \qquad \|u\|_V \le \frac{1}{\alpha}\,\|L\|_{V^*}.$$

Imkime

$$L(v) = (f,v), \quad f \in V.$$

Tada, kaip parodėme pratimuose,

$$\|L\|_{V^*} = \|f\|_V,$$

taigi gauname sprendinio stabilumo įvertį (uždavinio duomenų atžvilgiu) pagrindinėje V normoje

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\alpha}\,\|f\|_V.$$

Variacinis metodas

Spręskime uždavinį: reikia rasti $u \in V$, tokį kad

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V.$$

Pažymėkime

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v).$$

Teorema. *Tarkime, kad $a(\cdot,\cdot)$ yra simetrinė, teigiamai apibrėžta bitiesinė forma, L aprėžtas tiesinis funkcionalas Hilberto erdvėje V. Elementas $u \in V$ yra uždavinio sprendinys tada ir tik tada, kai*

$$F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in V.$$

Būtinumas.

Tarkime, kad u yra uždavinio sprendinys.
Nagrinėkime bet kokį $v \in V$:

$$v = u + w.$$

Tada apskaičiuojame funkcionalo reikšmę:

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{1}{2}a(u+w, u+w) - L(u+w) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) + a(u,w) - L(w) \\ &\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}a(w,w) \\ &= F(u) + \frac{1}{2}a(w,w) \\ &\geq F(u). \end{aligned}$$

Pakankamumas.

Tegul u yra minimizacijos uždavinio sprendinys.

Pasirinkime $v \in V$ ir apibrėžkime funkciją

$$g(t) := F(u + tv) \geq F(u) = g(0), \quad \forall t \in \mathcal{R}.$$

Funkcija $g(t)$ yra antrosios eilės polinomas:

$$\begin{aligned} g(t) = & \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) + t\Big(a(u,v) - L(v)\Big) \\ & \frac{1}{2}t^2 a(v,v). \end{aligned}$$

Būtinoji minimumo sąlyga

$$0 = g'(0) = a(u,v) - L(v).$$

□