Skaičiavimo metodų ir matematinio modeliavimo

seminaras Nr. 16 (122)

Nekorektiški matematikos uždaviniai: reguliarizavimo metodas

Raimondas ČIEGIS

Vilniaus Gedimino technikos universitetas,

Saulėtekio al. 11, Vilnius, Lietuva

e-mail: rc@fm.vgtu.lt

Sprendinio parinkimo metodas

$$Av = u, \quad u \in U, \quad v \in V, \tag{1}$$

kur U ir V yra metrinės erdvės. Tarsime, kad $AV = U$ ir egzistuoja atvirkštinis operatorius A^{-1}, bet jis nebūtinai yra tolydus.

1. Apibrėžiame sprendinių aibės poaibį $W \subset V$ ir skaičiuojame jos elementų vaizdus Av, $v \in W$, t.y. sprendžiame tiesioginį uždavinį, kuris yra daug paprastesnis už atvirkštinį uždavinį $A^{-1}u$.

2. Ieškome tokio artinio $v_0 \in W$, kuris minimizuoja sprendinio netiktį

$$\rho_U(Av_0, u) = \inf_{v \in W} \rho_U(Av, u). \tag{2}$$

Variacinį uždavinį (2) dažniausiai sprendžiame kokiu nors iteraciniu metodu ir randame elementų seką

$$\{v_j \in W,\ j = 1, \ldots, N\},$$

kurios vaizdai Av_j konverguoja į u_T:

$$\rho_U(Av_j, u_T) \to 0, \quad \text{kai} \quad j \to \infty.$$

Svarbu rasti nesunkiai patikrinamas apriorines sąlygas, garantuojančias, kad ir elementų seka

$$v_j \to v_T,$$

t.y. v_j konverguoja į tikslų uždavinio (1) sprendinį.

Apibrėžimas 1. Metrinės erdvės U poaibį $M \subset U$ vadiname kompaktišku erdvėje U, jeigu iš bet kurios jo elementų begalinės sekos $\{u_n\} \subset M$ galima išskirti posekį, konverguojantį į kurį nors erdvės U elementą.

1 teorema. Tegul metrinė erdvė V atvaizdžiu $A : V \to U$ vaizduojama į kitą metrinę erdvę U. Pasirinkime poaibį $V_0 \subset V$, kuris yra kompaktiškas erdvėje V, ir pažymėkime šios aibės vaizdą $U_0 = AV_0 \subset U$. Jeigu atvaizdavimas $A : V \to U$ yra tolydus ir abipus vienareikšmis, tai atvirkštinis atvaizdavimas $A^{-1} : U_0 \to V_0$ taip pat yra tolydus metrinėje erdvėje V.

Įrodymas.

Imkime bet kokį elementą $u_0 \in U_0$ ir įrodykime, kad funkcija $A^{-1}(u)$ yra tolydi šio elemento atžvilgiu.

Tarkime priešingai, kad ši prielaida yra neteisinga. Tada egzistuoja toks skaičius $\varepsilon_1 > 0$, kad bet kokiam $\delta > 0$ galima parinkti elementą $u_\delta \in U_0$, kad $\rho_U(u_\delta, u_0) < \delta$, bet $\rho_V(v_\delta, v_0) \geq \varepsilon_1$, čia $v_0 = A^{-1}(u_0)$, $v_\delta = A^{-1}(u_\delta)$.

Pasirinkime teigiamųjų skaičių seką $\{\delta_n > 0\}$, konverguojančią į nulį

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Kiekvienam δ_n egzistuoja $u_n \in U_0$, toks kad:

$$\rho_U(u_n, u_0) < \delta_n, \quad \text{bet} \quad \rho_V(v_n, v_0) \geq \varepsilon_1,$$

čia pažymėjome $v_n = A^{-1}(u_n) \in V_0$. Aišku, kad elementų seka $\{u_n\}$ konverguoja į u_0:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0.$$

Kadangi visi elementai v_n priklauso aibei V_0, kuri yra kompaktiška metrinėje erdvėje V, tai iš begalinės sekos $\{v_n\}$ galime išrinkti posekį $\{v_{n_k}\}$, konverguojantį į elementą $\tilde{v}_0 \in V$:

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = \tilde{v}_0 \neq v_0.$$

Nagrinėkime aibės U_0 elementų posekį $\{u_{n_k} = A(v_{n_k})\}$.

Kadangi funkcija $A(v)$ yra tolydi, tai

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \lim_{k\to\infty} A(v_{n_k}) = A(\lim_{k\to\infty} v_{n_k}) = A(\tilde{v}_0) = \tilde{u}_0.$$

Seka $\{u_{n_k}\}$ yra konverguojančios sekos $\{u_n\}$ posekis, todėl jų ribos turi sutapti:

$$\tilde{u}_0 = u_0.$$

Tada teisingos tokios lygybės:

$$A(\tilde{v}_0) = \tilde{u}_0 = u_0 = A(v_0),$$

t.y. $A(\tilde{v}_0) = A(v_0)$. Atvaizdavimas $A : V \to U$ yra abipus vienareikšmis, todėl $\tilde{v}_0 = v_0$. Gavome prieštaravimą anksčiau įrodytai nelygybei $\tilde{v}_0 \neq v_0$. Teorema įrodyta. $\square$

Nagrinėkime atvejį, kai vietoj tikslios dešiniosios pusės u_T turime tik jos artinį u_δ, kuriam teisingas įvertis

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \leq \delta.$$

Tarkime, kad $u_\delta \in AW$, t.y. u_δ. Iš **1 teoremos** gauname, kad atvaizdavimas

$$A^{-1} : AW \to W$$

yra tolydus. Sprendinio v_T artiniu galime imti elementą

$$v_\delta = A^{-1} u_\delta \in W.$$

Kai $\delta \to 0$, toks artinys v_δ konverguoja į tikslų uždavinio sprendinį

$$\lim_{\delta \to 0} v_\delta = v_T.$$

Dažniausiai sprendinio artinį parenkame spręsdami variacinį uždavinį (2). Tada užtenka rasti elementą $\tilde{v}_\delta \in W$, tenkinantį nelygybę

$$\rho_U(A\tilde{v}_\delta, u_\delta) \leq C\delta, \quad C > 0.$$

Naudodami trikampio nelygybę įsitikiname, kad teisingas įvertis

$$\begin{aligned}\rho_U(A\tilde{v}_\delta, u_T) &\leq \rho_U(A\tilde{v}_\delta, u_\delta) + \rho_U(u_\delta, u_T) \\ &\leq (C+1)\delta = \delta_1,\end{aligned}$$

Apibendrintasis sprendinys

Uždavinio

$$Av = u, \quad u \in U, \; v \in V$$

sprendinio paieška yra korektiškas uždavinys, kai atvaizdavimas $A : V \to U$ yra tolydus ir abipus vienareikšmis, o sprendinio ieškome kompaktiškoje aibėje $W \subset V$ ir $u_T \in AW$.

Sprendinys $v = A^{-1}u$ gali ir neegzistuoti, jei $u \notin AW$. Taip dažnai atsitinka netgi ir tada, kai tiksli funkcija $u_T \in AW$.

Apibrėžimas. Funkcija $\tilde{v}$, aibėje W minimizuojanti funkcionalą

$$\rho_U(A\tilde{v}, u) = \inf_{v \in W} \rho_U(Av, u), \tag{3}$$

yra vadinama apibendrintuoju uždavinio (1) sprendiniu aibėje W.

Apibrėžimas. Tegul elementas u ir aibė Q priklauso metrinei erdvei U:

$$u \in U, \quad Q \subset U.$$

Aibės Q elementas $q \in Q$ vadinamas u elemento projekcija aibėje Q, jei išpildyta lygybė

$$\rho_U(u,q) = \rho_U(u,Q) := \inf_{r \in Q} \rho_U(u,r).$$

Šį elementą žymėsime $q = Pu$.

2 teorema. Tegul A yra tolydus operatorius. Jeigu lygtis $Av = u$ kompakte W turi vienintelį sprendinį (čia $u \in AW$), o kiekvienam elementui $u \in U$ apibrėžta vienintelė jo projekcija $q = Pu$ į aibę $Q = AW$, tai egzistuoja vienintelis (1) uždavinio apibendrintasis sprendinys, kuris tolydžiai priklauso nuo dešiniosios lygties pusės u.

$$v = A^{-1}\tilde{u} \quad (v = A^{-1}Pu).$$

Pakankamosios sąlygos:

1. Operatorius A yra tiesinis;

2. Homogeninė lygtis

$$Av = 0$$

   turi tik trivialų sprendinį $v = 0$;

3. Kompaktiška aibė W yra iškila;

4. Bet kuri sfera $S_R(u_0) \subset U,\ u_0 \in U$:

$$S_R(u_0) = \Big\{ u \in U : \ \ \rho_U(u, u_0) = R \Big\}$$

   yra griežtai iškila, t.y.:

$$\rho_U(c_1 u_1 + c_2 u_2, u_0) < R,$$

   jei $c_1 + c_2 = 1,\ c_1, c_2 > 0$.

$$A\tilde{v} = \tilde{u}, \quad \tilde{u} \in AW.$$

Akivaizdu, kad $\tilde{u} = Pu$ yra elemento u projekcija į aibę AW. Įsitikinsime, kad tokia projekcija yra vienintelė.

Pirmiausia įrodome, kad jei aibė W yra iškila, o operatorius A tiesinis, tai šio kompakto vaizdas, t.y. aibė AW, irgi yra iškila. Imkime bet kuriuos du elementus $u_1, u_2 \in AW$, reikia įrodyti, kad $c_1u_1 + c_2u_2 \in AW$.

Egzistuoja tokie $v_1, v_2 \in W$, kad

$$Av_1 = u_1, \quad Av_2 = u_2.$$

Imkime $v = c_1v_1 + c_2v_2 \in W$, nes aibė W yra iškila.

$$A(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1Av_1 + c_2Av_2 = c_1u_1 + c_2u_2,$$

Tarkime priešingai, kad elemento $u \in U$ projekcija aibėje AW yra nevienintelė ir turime dvi projekcijas $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in AW$. Tada teisinga lygybė

$$\rho_U(\tilde{u}_1, u) = \rho_U(\tilde{u}_2, u) = R.$$

Per taškus $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ galime sukonstruoti sferą $S_R(u)$.

Imkime naują elementą $\tilde{u}_3 = (\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)/2$. Kadangi $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in AW$, o aibė AW yra iškila, tai $\tilde{u}_3 \in AW$.

Iš teoremos 4 sąlygos gauname, kad sfera $S_R(u)$ yra griežtai iškila, todėl

$$\rho_U(\tilde{u}_3, u) < R.$$

Įsitikinsime, kad apibendrintas sprendinys $\tilde{v} \in W$ yra vienintelis. Tarkime, kad egzistuoja dar viena funkcija $\tilde{v}^* \in W$, tokia kad $A\tilde{v}^* = \tilde{u}$. Tada atėmę abi lygybes ir pasinaudoję tuo, kad A yra tiesinis operatorius, gauname lygtį

$$A\tilde{v} - A\tilde{v}^* = A(\tilde{v} - \tilde{v}^*) = 0.$$

Iš 2 sąlygos seka, kad tada

$$\tilde{v} - \tilde{v}^* = 0, \quad \text{t.y.} \quad \tilde{v} = \tilde{v}^*.$$

Gautasis prieštaravimas ir įrodo, kad negali egzistuoti keli apibendrintieji sprendiniai.

Reguliarizavimo metodas

Tarkime, kad u_T apibrėžia tikslius pradinius duomenis, o v_T yra uždavinio sprendinys:

$$Av_T = u_T.$$

Dažniausiai vietoj u_T žinome tik jo artinį u_δ:

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \leq \delta.$$

Reikia rasti tokį tikslaus sprendinio artinį v_δ, kuris tolydžiai priklauso nuo u_δ.

Negalime tokio artinio skaičiuoti naudodami formulę

$$v_\delta = A^{-1}u_\delta,$$

kadangi šis sprendinys egzistuoja ne visiems u_δ (nes u_δ gali ir nepriklausyti aibei AV). Be to toks sprendinys nėra stabilus pradinių duomenų mažų pokyčių atžvilgiu.

Reguliarizuojančio operatoriaus $R(u, \alpha)$ apibrėžimas

1. Egzistuoja tokie skaičiai α_1, δ_1, kad operatorius $R(u, \alpha)$ apibrėžtas aibėje:

$$D_1 = \{(\delta,\, u) : \; 0 < \alpha < \alpha_1, \; \rho_U(u, u_T) \le \delta_1\}.$$

2. Egzistuoja funkija $\alpha = \alpha(\delta)$, kad bet kokiam $\varepsilon > 0$ galima parinkti tokį $\delta(\varepsilon) \le \delta_1$, kad jei atstumas nuo elemento $\tilde{u} \in U$ iki u_T yra ne didesnis už $\delta(\varepsilon)$:

$$\rho_U(\tilde{u}, u_T) \le \delta(\varepsilon),$$

tai teisingas įvertis $\rho_V(v_\alpha, v_T) \le \varepsilon$, čia elementą v_α apskaičiuojame taip:

$$v_\alpha = R\Big(\tilde{u}, \alpha(\delta)\Big).$$

Tarkime, kad uždavinys $Av = u_T$ turi vienintelį sprendinį, tačiau vietoj u_T žinome tik elementą $u_\delta \in U$, kuris skiriasi nuo u_T ne daugiau kaip dydžiu δ:

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \leq \delta.$$

Tada apytikslį sprendinį ieškosime aibėje

$$Q_\delta = \{v \in V : \quad \rho_U(Av, u_\delta) \leq \delta\}.$$

Nagrinėkime funkcionalą $\Omega(v)$, apibrėžtą metrinės erdvės V tirštame poaibyje V_1. Jis vadinamas *stabilizuojančiu* funkcionalu, jei išpildytos tokios trys sąlygos:

1. Funkcionalas $\Omega(v)$ yra neneigiamas, t.y. $\Omega(v) \geq 0$, $v \in V_1$.

2. Uždavinio su tiksliomis pradinėmis sąlygomis sprendinys $v_T = A^{-1}u_T$ priklauso funkcionalo apibrėžimo sričiai, t.y. $v_T \in V_1$.

3. Kiekvienam skaičiui $d > 0$ aibė

$$V_{1,d} = \{v \in V_1 : \quad \Omega(v) \leq d\}$$

yra kompaktiška erdvėje V.

$$V_\delta = \{ v \in V_1 : \ \ \rho_U(Av, u_\delta) \le \delta \}$$

Ieškokime tokio šios aibės elemento $v_\delta \in V_\delta$, kad

$$\Omega(v_\delta) = \inf_{v \in V_\delta} \Omega(v). \tag{4}$$

$$v_\delta = R(u_\delta, \delta)$$

Teorema. *Tarkime, kad kiekvienam $\delta > 0$ ir $u_\delta \in U$ egzistuoja uždavinio (4) sprendinys, tada $R(u_\delta, \delta)$ yra uždavinio $Av = u$ reguliarizuojantis operatorius.*

Svarbiausia pastaba, kad v_δ priklauso kompaktiškai erdvėje V aibei ($\forall \delta > 0$):

$$V_T = \{ v \in V_1 : \ \ \Omega(v) \le \Omega(v_T) \}.$$

Iš sekos $\{v_{\delta_n}\}$, priklausančios kompaktiškai aibei V_T, galime išskirti konverguojantį erdvės V metrikoje posekį $\{v_{\delta_{n_k}}\}$.

Pateiksime paprastą pakankamąją sąlygą, kada minimizuojantis sprendinys v_δ tikrai egzistuoja.

Apibrėžimas. Pažymėkime $\|v\|_1 := \Omega^{1/2}(v)$. Jei aibėje V_1 funkcionalas $\|v\|_1$ yra norma, tada galime apibrėžti naują metriką

$$\rho_1(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\|_1.$$

Sakysime, kad funkcionalas $\Omega(v)$ aibėje V_1 apibrėžia mažoruojančią metriką, jei išpildyta nelygybė

$$\rho_V(v_1, v_2) \leq \rho_1(v_1, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V_1,$$

o norma $\|v\|_1$ generuoja Hilberto erdvę.

Tarkime, kad funkcionalo $\Omega(v)$ minimizavimo aibėje V_1 uždavinys

$$\Omega(v_0) = \inf_{v \in V_1} \Omega(v)$$

turi vienintelį sprendinį $v_0 \in V_1$. Tada turime išnagrinėti dvi galimybes:

1. Elementas $v_0 \in V_\delta$, t.y. teisinga nelygybė
$$\rho_u(Av_0, u_\delta) \leq \delta.$$

2. Elementas $v_0 \notin V_\delta$, t.y. teisinga nelygybė
$$\rho_u(Av_0, u_\delta) > \delta.$$

Apibrėžimas. Stabilizuojantį funkcionalą $\Omega(v)$ vadiname kvazimonotonišku, jeigu visiems $v \in V_1$, tokiems kad $v \neq v_0$, kiekvienoje v aplinkoje egzistuoja elementas $v_1 \in V_1$, toks kad išpildyta nelygybė:

$$\Omega(v_1) < \Omega(v).$$

Taigi kvazimonotoniškas stabilizuojantis funkcionalas neturi lokalių minimumų aibėje $V_1 \setminus \{v_0\}$.

Lema. *Jeigu* $v_0 \notin V_\delta$, *tai variacinio uždavinio*

$$\Omega(v_\delta) = \inf_{v \in V_\delta} \Omega(v),$$

sprendinys v_δ *tenkina sąlygą:*

$$\rho_u(Av_\delta, u_\delta) = \delta.$$

Variacinis reguliarizavimo algoritmas.

Reikia rasti elementą $v_\alpha \in V_1$, *tenkinatį sąlygą*

$$M_\alpha(v_\alpha, u_\delta) = \inf_{v \in V_1} M_\alpha(v, u_\delta),$$

$$M_\alpha(v, u_\delta) = \rho_u^2(Av, u_\delta) + \alpha\Omega(v).$$

Parametrą $\alpha = \alpha(\delta)$ *parenkame taip, kad galiotų lygybė*

$$\rho_u(Av_\alpha, u_\delta) = \delta.$$

Integralinės lygties sprendimas

Spręsime tiesinę integralinę lygtį

$$Av := \int_a^b K(x,s)v(s)\,ds = u(x), \quad c \le x \le d,$$

kai V yra tolydžiųjų funkcijų erdvė $C[a,b]$, o pradiniai duomenys $u(x)$ priklauso erdvei $U = L_2[c,d]$.

Jeigu branduolys $K(x,s)$ yra tolydi funkcija, tai operatorius A yra tolydus.

Stabilizuojančiu funkcionalu $\Omega(v)$ imsime funkcionalą

$$\Omega(v) := \int_a^b \left(q(s)v^2(s) + p(s)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \right) ds,$$

funkcijos $q(s), p(s) \in C[a,b]$ tenkina sąlygas

$$q(s) > 0, \quad p(s) \ge p_0 > 0.$$

Funkcionalas $T_\alpha(v, u_\delta)$ apibrėžtas taip

$$T_\alpha(v,u_\delta) = \rho_u^2(Av,u_\delta) + \alpha\Omega(v),$$
$$\rho_u^2(Av,u_\delta) = (Av - u_\delta, Av - u_\delta).$$

Darome prielaidą, kad žinome funkcijos v reikšmes intervalo galuose. Funkcionalo $\Omega(v)$ pirmoji variacija seka iš bendrosios formulės

$$\delta\Omega(v) = 2\int_a^b \eta(s)\Big(-\frac{d}{ds}\Big(p(s)\frac{dv}{ds}\Big) + q(s)v(s)\Big)\,ds.$$

Taip pat gauname tokią išraišką

$$\begin{aligned}\delta\rho_u^2(Av, u_\delta) &= 2(Av - u_\delta, A\eta)\\ &= 2(A^*Av - A^*u_\delta, \eta).\end{aligned}$$

Jungtinis operatorius A^*u apibrėžiamas taip (sukeičiame integravimo tvarką)

$$A^*u = \int_c^d K(x,s)u(x)\,dx.$$

todėl

$$A^*Av = \int_a^b \tilde{K}(s,t)v(t)\,dt,$$

$$\tilde{K}(s,t) = \int_c^d K(x,s)K(x,t)\,dx.$$

Funkcionalo $T_\alpha(v)$ ekstremumo funkciją randame spręsdami integralinį - diferencialinį kraštinį uždavinį:

$$\int_a^b \tilde{K}(s,t)v_\alpha(t)dt + \alpha\Big(-\frac{d}{ds}\Big(p(s)\frac{dv_\alpha}{ds}\Big) + q(s)v_\alpha(s)\Big)$$
$$= \int_c^d K(x,s)u_\delta(x)dx,$$

$v_\alpha(a) = v_a, \quad v_\alpha(b) = v_b.$

Parametrą $\alpha = \alpha(\delta)$ parenkame taip, kad galiotų lygybė

$$(Av_\alpha - u_\delta, Av_\alpha - u_\delta) = \delta^2.$$