Skaičiavimo metodų ir matematinio modeliavimo

seminaras Nr. 15 (122)

Nekorektiški matematikos uždaviniai: specialieji skyriai

Raimondas ČIEGIS

Vilniaus Gedimino technikos universitetas,

Saulėtekio al. 11, Vilnius, Lietuva

e-mail: rc@fm.vgtu.lt

Uždavinių klasifikacija

Turime pradinius duomenis u, naudodami pasirinktąjį algoritmą apibrėžiame uždavinio sprendinį

$$v = R(u).$$

Pradiniai duomenys u priklauso metrinei erdvei U, o sprendinys v – metrinei erdvei V.

Atstumus tarp dviejų elementų šiose erdvėse žymėsime

$$\rho_U(u_1, u_2), \quad \rho_V(v_1, v_2).$$

1902 metais Ž. Adamaras pateikė korektiškų matematinių uždavinių apibrėžimą

1. Kiekvienam elementui $u \in U$ egzistuoja sprendinys $v = R(u) \in V$.

2. Toks sprendinys yra vienintelis.

3. Uždavinys yra stabilus metrinėse erdvėse (V, U).

Apibrėžimas. Uždavinys $v = R(u) \in V$, $u \in U$ vadinamas stabiliu metrinėse erdvėse (V, U), jei bet kokiam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta(\varepsilon) > 0$, kad imdami $u_1, u_2 \in U$, tenkinančius nelygybę $\rho_U(u_1, u_2) \leq \delta(\varepsilon)$, gauname įvertį $\rho_V(v_1, v_2) \leq \varepsilon$, čia

$$v_1 = R(u_1), \;\; v_2 = R(u_2), \quad v_1, v_2 \in V.$$

Imkime $u(x) \in C[a,b]$. Tirsime integralo

$$v = \int_a^b u(x)\,dx$$

skaičiavimo uždavinio korektiškumą.

Nagrinėkime uždavinio stabilumą. Tarkime, kad atstumas tarp pradinių duomenų

$$\rho_U(u_1,u_2) := \max_{a\le x\le b} |u_1(x) - u_2(x)| \le \delta.$$

Tada įvertiname atstumą tarp vaizdų:

$$\rho_V(v_1,v_2) := \left| \int_a^b \Big(u_1(x) - u_2(x)\Big)\,dx \right|$$

$$\le \int_a^b |u_1(x) - u_2(x)|\,dx \le (b-a)\delta.$$

Integravimo veiksmas yra korektiškas.

Išvestinės skaičiavimas

Reikia rasti diferencijuojamos funkcijos $u_T(t) \in C^1(a,b)$ išvestinę, kai šios funkcijos reikšmes žinome tik su paklaida.

Pažymėkime $v_T(t) = u'_T(t)$ funkcijos $u_T(t)$ išvestinę. Tarkime, kad vietoj funkcijos $u_T(t)$ turime tik jos artinį

$$u(t) = u_T(t) + \varepsilon \sin(\omega t), \quad \varepsilon, \omega > 0.$$

Tolydžių funkcijų metrinėje erdvėje $C(a,b)$, kai atstumas apibrėžiamas taip:

$$\rho_C(u_1, u_2) = \max_{a \le t \le b} |u_1(t) - u_2(t)|,$$

atstumas tarp funkcijų $u(t)$ ir $u_T(t)$ yra

$$\rho_C(u, u_T) \le \varepsilon.$$

Metrinėje erdvėje V naudojame tą pačią metriką $C(D)$. Tada apskaičiuotoji išvestinės reikšmė skiriasi nuo tikslios išvestinės dydžiu

$$\rho_C(v, v_T) = \max_{t \in D} |\varepsilon\omega \cos(\omega t)| = \varepsilon\omega.$$

Parinkus pakankamai didelį parametrą ω (pvz. $\omega = 1/\varepsilon$), šis skirtumas nėra mažas skaičius, kai ε yra mažas skaičius.

Taigi išvestinės skaičiavimas tokioje metrinių erdvių poroje (U, V) yra nekorektiškas uždavinys.

Pasirinkę kitą metrinę erdvę U, galime gauti ir korektišką uždavinį. Pavyzdžiui, tarkime kad $u(t) \in C^1(D)$ yra tolydžiai diferencijuojamos funkcijos ir atstumas tarp dviejų funkcijų apibrėžiamas taip:

$$\rho_{C^1}(u_1, u_2) = \max_{t \in D} \Big(|u_1(t) - u_2(t)| + |u_1'(t) - u_2'(t)| \Big).$$

Kadangi teisingas įvertis

$$\rho_C(v, v_T) \leq \rho_{C^1}(u, u_T),$$

tai sprendinys $v(t) = u'(t)$ tolydžiai priklauso nuo pradinių duomenų. Taigi išvestinės skaičiavimas yra korektiškas uždavinys, kai turime metrinių erdvių porą

$$(U, V) = \Big(C^1(D),\, C(D) \Big).$$

Taigi bazinius matematikos kursus dėstome ... neteisingai?!

Pradėti reikėtų nuo paprastesnio skyriaus – integravimo, nes tai korektiškas matematinis uždavinys, o tik tada nagrinėti išvestinių skaičiavimą, kadangi tai labai netrivialus ir nekorektiškas uždavinys.

Studentai ir dauguma dėstytojų šių uždavinių sudėtingumą vertina visai kitaip – nes kas gali būti lengviau už diferencijavimą? Bet elementarias funkcijas nesunku išmokti integruoti Maple ir panašiais paketais.

O pagrindinės integravimo taisyklės (adityvumo, integravimo dalimis ir kitos) labai gražios ir paprastos.

Įvairūs taikomieji modeliai užrašomi diferencialinėmis lygtimis (matematinės fizikos lygtys, paprastosios diferencialinės lygtys), bet šie uždaviniai dažniausiai yra korektiški (tokia analizė jau Adamaro nuopelnas), nes ... išvestinių mes neskaičiuojame.

Srityje

$$D = \{(x, y) : \quad a < x < b, \;\; 0 \leq y < Y\}$$

spręsime dvimatę Laplaso lygtį

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

kai užduotos kraštinės sąlygos

$$v(x, y)\Big|_{\partial D} = u(x, y).$$

Naudodami maksimumo principą įrodome sprendinio stabilumo nelygybę ((1) uždavinys tiesinis):

$$\max_{(x,y)\in D} |v(x, y)| \leq \max_{(x,y)\in \partial D} |u(x, y)|.$$

Uždavinio korektiškumas priklauso nuo papildomų sąlygų, kurios formuluojamos (1) diferencialinei lygčiai. Jei begalinėje juostoje užduodamos pradinės sąlygos

$$v(x,0) = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty \qquad (2)$$

tai gauname nekorektišką uždavinį (tai ir yra Adamaro pavyzdys!).

Jeigu pradinė funkcija $\varphi_T(x) \equiv 0$, tai (1) – (2) uždavinio sprendinys

$$v_T(x,y) \equiv 0.$$

Pakeitę pradinę sąlygą į $\varphi(x) = \dfrac{1}{a}\sin ax$, gauname sprendinį

$$v(x,y) = \frac{1}{a^2}\sin(ax)\sinh(ay), \quad a > 0.$$

Parinkdami didelį skaičių a, atstumą tarp pradinių duomenų

$$\rho_C(\varphi,\varphi_T) = \sup_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{1}{a}\sin ax\right| = \frac{1}{a}$$

galime padaryti kiek norima mažu. Tačiau atstumas tarp sprendinių

$$\rho_{C(D)}(v,v_T) = \sup_{(x,y)\in D}\left|\frac{1}{a^2}\sin(ax)\sinh(ay)\right| = \frac{1}{a^2}\sinh(aY)$$

gali būti kiek norima dideliu, kai parenkame didelį skaičių a.

Integralinės lygtys dažniausiai apibrėžia nekorektiškus uždavinius.

Šiuolaikinė neardomosios diagnostikos, medicinos (tomografijos) aparatūra padeda gauti svarbią informaciją, kurios negalime tiesiogiai išmatuoti ar tirti, o naudojame tik nesunkiai matuojamų pagalbinių charakteristikų ar požymių rezultatus.

Tokių metodų matematinis modelis aprašomas integraline lygtimi

$$Av := \int_a^b K(x,s)v(s)\,ds = u(x), \quad c \le x \le d.$$

1 pastaba. Funkcijos $u(t)$ išvestinės skaičiavimo uždavinį irgi galime užrašyti kaip integralinę lygtį

$$\int_0^t v(s)\,ds = u(t) - u(0).$$

Kai vietoj tikslių pradinių duomenų $u_T(x)$ turime tik apytikslius eksperimentinius duomenis $u(x) \in U$, tai integralinės lygties

$$Av = u, \quad u(x) \in U$$

sprendinys $v \in V$ gali ir neegzistuoti, jei $u(x) \notin AV$. Tada neišpildyta pirmoji korektiškų uždavinių apibrėžimo sąlyga.

Pavyzdžiui, $K(x, s)$ yra tolydžiai diferencijuojama pagal x funkcija, o eksperimente gautoji funkcija $u(x)$ nėra diferencijuojama.

Tokiais atvejais negalime taikyti klasikinio sprendinio apibrėžimo

$$v = A^{-1}u,$$

nes toks sprendinys egzistuoja tik tada, kai $u(x)$ išvestinė yra tolydi funkcija.

Tarkime, kad $U = L_2[c,d]$ su metrika

$$\rho_U(u_1,u_2) = \left(\int_c^d \left(u_1(x) - u_2(x)\right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Imkime apytikslius pradinius duomenis:

$$u(x) = u_T(x) + M \int_a^b K(x,s) \sin(\omega s) ds, \ M, \omega > 0.$$

Įvertinsime pradinių duomenų paklaidą

$$\rho_U(u,u_T) = M \left[\int_c^d \left(\int_a^b K(x,s) \sin(\omega s) ds \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Integruodami dalimis ir pasinaudoję $\left|\frac{\partial K}{\partial s}\right| \le C$, gauname nelygybę

$$\rho_U(u,u_T) \le \frac{CM}{\omega}.$$

Sprendinio pokyčius vertinsime $V = C[a,b]$ metrikoje:

$$\rho_C(v_1, v_2) = \max_{a \le x \le b} \Big| v_1(x) - v_2(x) \Big|.$$

Tokiems pradiniams duomenims atstumas tarp sprendinių

$$\rho_{C[a,b]}(v, v_T) = M \max_{a \le s \le b} |\sin(\omega s)| = M$$

yra kiek norima didelis, jei M didelis skaičius.

Sprendinius galime apibrėžti ir $L_2(a,b)$ metrinėje erdvėje. Tada gauname lygybę:

$$\rho_{L_2}(v, v_T) = M \Big(\int_a^b \sin^2(\omega s)\, ds \Big)^{1/2}$$

$$= M \Big(\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin\big(\omega(b-a)\big) \cos\big(\omega(b+a)\big) \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= CM.$$

Vėl neišpildyta sprendinio tolydžios priklausomybės nuo pradinių duomenų sąlyga.

Paprasti reguliarizavimo algoritmai

Pažymėkime $v_T(t) = u'_T(t)$ tikslią išvestinę. Ją apskaičiuojame naudodami apibrėžimą

$$u'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

arba remiantis šia formule įrodytomis išvestinių skaičiavimo taisyklėmis.

Vietoj funkcijos $u_T(t)$ turime tik jos artinį

$$u(t) = u_T(t) + \delta(t), \quad |\delta(t)| \le \delta_M.$$

Funkcija $\delta(t)$ beveik visada nediferencijuojama (reikia apibrėžti apibendrintąjį sprendinį).

Jei ji visgi diferencijuojama, tai toks veiksmas yra nestabilus pradinių duomenų paklaidų atžvilgiu.

"Gamtoje išvestinių nėra, sutinkame tik baigtinius skirtumus" (autorius nežinomas).

Išvestinės artinį skaičiuosime naudodami paprastą skaitinio diferencijavimo formulę

$$u'(t) \approx \frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$

Įvertinsime gautojo artinio paklaidą

$$\Big|\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u_T'(t)\Big| = \Big|\Big(\frac{u_T(t+h) - u_T(t)}{h} - u_T'(t)\Big) + \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h}\Big|.$$

Panaudoję Teiloro skleidinį, įvertiname pirmojo nario paklaidą

$$\frac{u_T(t+h) - u_T(t)}{h} - u_T'(t) = \frac{h}{2} u_T''(t + \theta h).$$

Apie matavimo paklaidas $\delta(t)$ žinome tik kad jos yra aprėžtos, todėl

$$\Big|\frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h}\Big| \le \frac{2\delta_M}{h} \to \infty, \quad \text{kai } h \to 0.$$

Rasime tokį h_0, kada bendroji aproksimavimo paklaida

$$\varphi(h) = \frac{Ch}{2} + \frac{2\delta_M}{h}$$

yra mažiausia.

Sprendžiame lygtį

$$\varphi'(h) := \frac{C}{2} - \frac{2\delta_M}{h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = 2\sqrt{\frac{\delta_M}{C}}.$$

Funkcijos $u_T(t)$ išvestinę apskaičiuojame tikslumu

$$\varphi(h_0) = \frac{Ch_0}{2} + \frac{2\delta_M}{h_0} = 2\sqrt{C\delta_M} = \mathcal{O}(\sqrt{\delta_M}).$$

Imkime centrinių skirtumų formulę

$$u'(t) \approx \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}.$$

Panaudoję Teiloro skleidinį, įvertiname baigtinių skirtumų formulės aproksimacijos paklaidą

$$\left| \frac{u_T(t+h) - u_T(t-h)}{2h} - u_T'(t) \right| = \frac{h^2}{6} |u_T'''(t + \theta_1 h)|.$$

Bendroji paklaida yra ne didesnė už

$$\varphi_2(h) = \frac{C}{6} h^2 + \frac{\delta_M}{h}.$$

Šis rėžis yra mažiausias, kai:

$$\varphi_2'(h) := \frac{C}{3} h - \frac{\delta_M}{h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \left(\frac{3\delta_M}{C} \right)^{1/3} = \mathcal{O}(\delta_M^{1/3}).$$

$$\varphi_2(h_0) = \frac{C}{2} h_0^2 + \frac{\delta_M}{h_0} = \mathcal{O}(\delta_M^{2/3}).$$