Matematinio modeliavimo katedros seminaras
viešoji paskaita

Kelių mastelių asimptotinės analizės principo taikymai netiesinių svyravimų teorijoje

Aleksandras Krylovas

2008 10 07

PASKAITOS PLANAS

- PAVYZDŽIAI

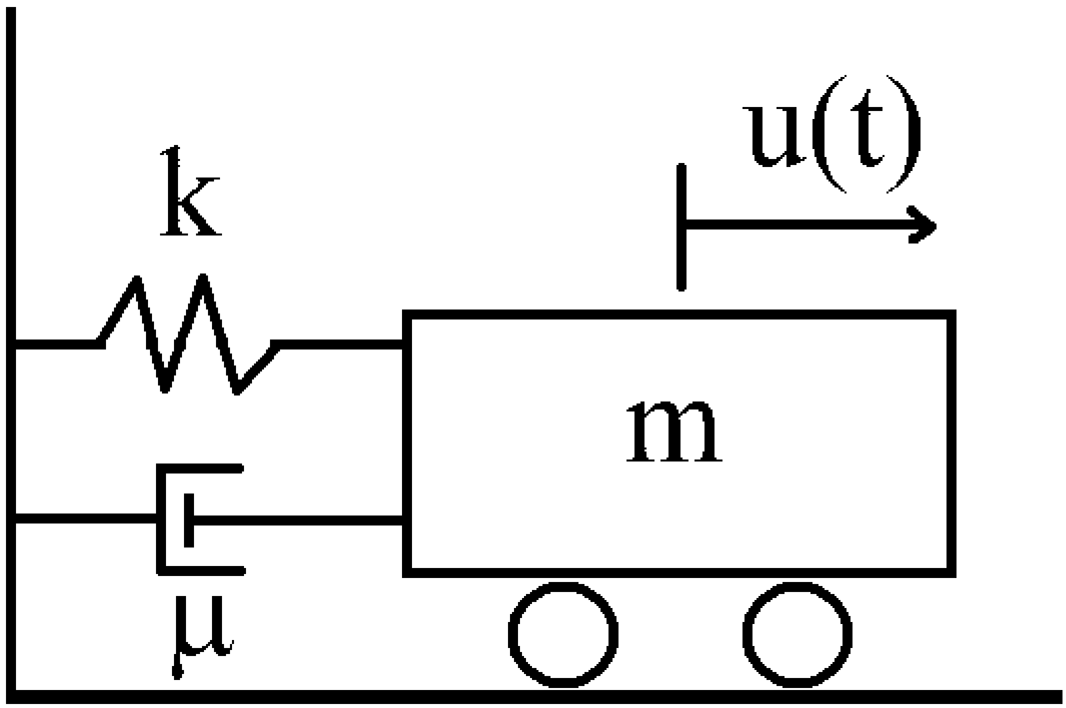
- BENDROJI ANALIZĖS SCHEMA

- VIDURKINIMO METODAS

- METODO APIBENDRINIMAI

- NAUJI UŽDAVINIAI

MATEMATINIO MODELIO PAVYZDYS



$u(t)[m]$ – vežimėlio poslinkis

(nežinomas dydis – priklausomas kintamasis)

$m[kg]$ – vežimėlio masė

$k\left[\frac{N}{m}\right]$ – spyruoklės standis $\left([1N]=\left[\frac{1kg\cdot 1m}{1s^2}\right]\right)$

$\mu\left[\frac{N\cdot s}{m}\right]$ – slopinimo koeficientas

$t[s]$ – laikas (nepriklausomas kintamasis)

PERTVARKIAI

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + \mu\frac{du}{dt} + ku = 0,$$

$$u(0) = u_0,\ \frac{du(0)}{dt} = 0$$

Lygties pertvarkiai

$$u(t) = \alpha y(x),\ x = \beta t$$

$$u' = \alpha\beta y'_x,\ \ u'' = \alpha\beta^2 y''_{xx}$$

$$\alpha = u_0,\ y(x) = \frac{u(t)}{u_0}$$

Bedimensinis lygties pavidalas

$$\frac{m\beta^2}{k}y'' + \frac{\mu\beta}{k}y' + y = 0$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

MODELIO ANALIZĖ I

$\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\varepsilon = \frac{\mu}{\sqrt{mk}} \ll 1$

$$y'' + \varepsilon y' + y = 0$$

Kai $\varepsilon = 0$, sprendinys:

$$y(x) = Ce^{ix} + \overline{C}e^{-ix} = A\cos x + B\sin x$$

Arba (kadangi $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$) $y(x) = \cos x$.

Kai $\varepsilon \neq 0$, turime

$$y(x;\varepsilon) = Ce^{\frac{-\varepsilon + i\sqrt{4-\varepsilon^2}}{2}x} + \overline{C}e^{\frac{-\varepsilon - i\sqrt{4-\varepsilon^2}}{2}x}$$

Atskirasis sprendinys:

$$y(x;\varepsilon) = e^{-\frac{\varepsilon x}{2}} \cos\left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}\, x\right)$$

Mažojo parametro metodas:

$$y(x;\varepsilon) \approx y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots$$

$$= \cos x + \varepsilon x \cos x + \varepsilon^2 \left(\frac{x \sin x}{8} + \frac{x^2 \cos x}{2}\right) + \cdots$$

Dėl **sekuliariųjų** narių εx, $\varepsilon^2 x^2$, ...
skleidinys **nėra taikytinas** ilgajame kintamojo x kitimo intervale $x \in \left[0, O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$

Dviejų mastelių metodas:
$\tau = \varepsilon x$ – lėtasis (bedimensinis) laikas
x – (greitasis) laikas (žymėsime t)

Skleidinys:

$$y(t;\varepsilon) = y_0(\tau, t) + \varepsilon y_1(\tau, t) + \varepsilon^2 y_2(\tau, t) + \cdots$$

MODELIO ANALIZĖ II

Atvejis $\beta = \frac{k}{\mu}$, $\varepsilon = \frac{mk}{\mu^2} \ll 1$

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0$$

$$y(t;\varepsilon) = Ae^{\frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}t} + Be^{\frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}t} \approx$$

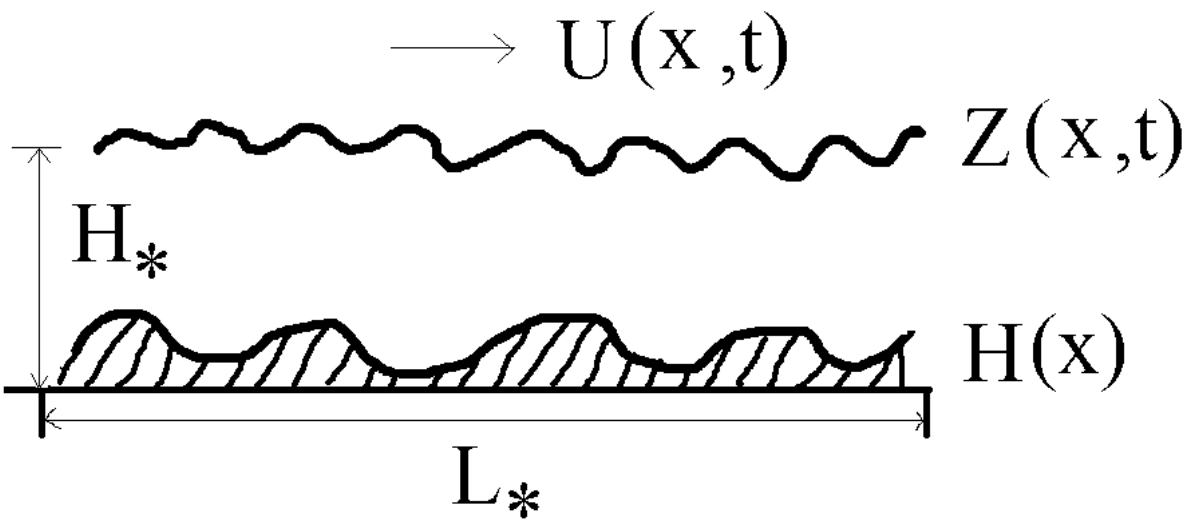
$$Ae^{-t}e^{\varepsilon t} + Be^{t}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$$

Trys masteliai:
t, $\tau = \varepsilon t$, $T = \frac{t}{\varepsilon}$

Pastebėkime, kad keitinys $y(t;\varepsilon) = Y(T;\varepsilon)$ keičia lygtį:

$$Y'' + Y' + \varepsilon Y = 0, T \gg 1$$

SEKLIŲJŲ VANDENŲ MODELIS



Z – vandens paviršiaus lygis,

U – vandens judėjimo greitis horizontaliąja kryptimi,

H – dugno profilio funkcija.

Visi kintamieji normalizuojami tipiniais horizontaliuoju (L_*) bei vertikaliuoju (H_*) dydžiais

LYGČIŲ SISTEMA

$$Z_t + (HU)_x =$$

$$\varepsilon \left(\frac{1}{6}(H^3 U_{xx})_x - \frac{1}{2}(HU)_{xxx} - H H_x (HU)_{xx} - (ZU)_x \right)$$

$$U_t + Z_x = -\varepsilon U U_x.$$

Mažasis parametras

$$\varepsilon = \left(\frac{H_*}{L_*} \right)^2 \ll 1$$

MODELIŲ
ASIMPTOTINĖS ANALIZĖS
BENDROJI SCHEMA

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U)\frac{\partial U}{\partial x} = o(1)$$

TAIKYMAI

- skysčio ir dujų dinamika
- plazmos fizika
- netiesinė optika
- tamprumo teorija

LYGČIŲ PERTVARKIAI

Tarkime, kad uždavinio matrica $A_0 = A(U_0)$ turi diagonalinę Žordano formą

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = RA_0R^{-1}$$

$(U_0 - const)$.

Šiuo atveju **nesutrikdytoji** sistema $U_t + A_0U_x = 0$ yra hiperbolinė ir gali būti perrašyta **Rymano invariantais**
$\tilde{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = RU$:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon f_j(t, x, U, U_x, U_{xx}, U_{xxx}),$$

$$u_j(0, x) = u_{0j}(x),\ j = 1, 2, \dots, n.$$

TOLYGIAI TINKAMŲ ASIMPTOTIKŲ KONSTRAVIMAS

Didelė sritis: $0 \leqslant t + |x| \leqslant O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Lėtasis laikas: $\tau = \varepsilon t$

Greitieji charakteristiniai kintamieji:
$y_j = x - \lambda_j t$, $j = 1, 2, \ldots, n$

Asimptotikos struktūra (anzats):

$$u_j(t, x; \varepsilon) \approx v_j(\tau, y_j) + O(\varepsilon)$$

VIDINIS VIDURKINIMAS
PAGAL CHARAKTERISTIKAS

Vidurkinimo operatorius:

$$M_j[f_j] \equiv$$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_j\,(\cdots)\Big|_{\substack{t=s\\ x=y_j+\lambda_j s\\ y_i=y_j+(\lambda_i-\lambda_j)s}} ds.$$

Asimptotinis artinys

$$u_j(t,x;\varepsilon) \approx v_j(\varepsilon t, x-\lambda_j t) + O(\varepsilon)$$

ieškomas kaip tokios suvidurkintosios sistemos sprendinys

$$\frac{\partial v_j}{\partial \tau} = M_j[f_j(\cdots, v_i(\tau, y_i), \cdots)],\ v_j(0, y_j) = u_{0j}(y_j).$$

TRIJŲ BANGŲ SĄVEIKOS PAVYZDYS

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} & = \varepsilon v w \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & = \varepsilon u w \\ \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} - \dfrac{\partial w}{\partial x} & = \varepsilon u v \end{cases}$$

Anzats:

$$u \sim U(\tau, y),\ v \sim V(\tau, x),\ w \sim W(\tau, z)$$

$$\tau = \varepsilon t,\ y = x - t,\ z = x + t$$

SUVIDURKINTOJI SISTEMA

$$\frac{\partial U(\tau, y)}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\tau, y + s) W(\tau, y + 2s)\, ds$$

$$\frac{\partial V(\tau, x)}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\tau, x - s) W(\tau, x + s)\, ds$$

$$\frac{\partial W(\tau, z)}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\tau, z - 2s) U(\tau, z - s)\, ds$$

Uždavinys gali būti sprendžiamas skaitiniais metodais kompaktinėje srityje $(\tau, X) \in [0, \tau_0] \times [0, 2\pi]$.

Čia pažymėta: $X = y = x = z$.

SEKLIŲJŲ VANDENŲ SUVIDURKINTOJI SISTEMA

Sistema užrašoma Rymano invariantais
$(U = v^{+} - v^{-}$, $Z = v^{+} + v^{-})$:

$$v_t^{\pm} \pm v_x^{\pm} = -\frac{\varepsilon}{2} f^{\pm},$$

$$f^{\pm} = \frac{1}{3}\left(v_{xxx}^{+} - v_{xxx}^{-}\right) + \left(h(x)(v^{+} - v^{-})\right)_x +$$

$$+\left((v^{+})^2 - (v^{-})^2\right)_x \pm (v^{+} - v^{-})(v_x^{+} - v_x^{-}).$$

Uždavinio su periodinėmis pradinėmis sąlygomis asimptotinis sprendinys $V^{\pm}(\tau, y^{\pm})$, $y^{\pm} = x \mp t$ ieškomos iš tokios suvidurkintosios sistemos:

$$V_\tau^{\pm} = \mp\frac{1}{2}\Bigg(\frac{1}{3} V_{y^{\pm}y^{\pm}y^{\pm}}^{\pm} +$$

$$+\left(\left\langle h(x)V^{\mp}\right\rangle_{\pm}\right)_{y^{\pm}} + 3V^{\pm}V_{y^{\pm}}^{\pm}\Bigg)$$

Vidurkinimo pagal charakteristikas operatoriai apibrėžiami taip:

$$\left\langle h(x)V^{\pm}\right\rangle_{\mp} =$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T h(y^{\mp}\mp s)V^{\pm}(\tau, y^{\mp}\mp 2s)\,ds.$$

Tarkime, kad funkcijos $Z(0,x)$ ir $h(x)$ yra beveik periodinės:

$$Z(0,x)\sim\sum_{k\in Z} Z_k exp(i\mu_k x),\ \ h(x)\sim\sum_{l\in Z} h_l exp(i\nu_l x).$$

Tada sistema yra **nerezonansinė**, kai

$$\forall k,l\in Z\ \mu_k\neq\pm 2\nu_l.$$

Šiuo atveju sistemoje $\left\langle h(x)V^{\mp}\right\rangle_{\pm} = 0$ ir gauname dvi nepriklausomas Kortevego – de Vryso lygtis:

$$\frac{\partial V^{\pm}}{\partial\tau}\pm\frac{3}{2}V^{\pm}\frac{\partial V^{\pm}}{\partial y}\pm\frac{1}{6}\frac{\partial^3 V^{\pm}}{\partial y^3} = 0.$$

Taigi turime Kortevego – de Vryso modelio *taikymo sąlygą* išnagrinėtam sekliųjų vandenų uždaviniui.

SEKLIŲJŲ VANDENŲ
BANGŲ REZONANSINĖ SĄVEIKA

Netiesinė sistema generuoja begalinį skaičių Furjė eilutės harmonikų

Tikslusis sprendinys yra nestabilusis

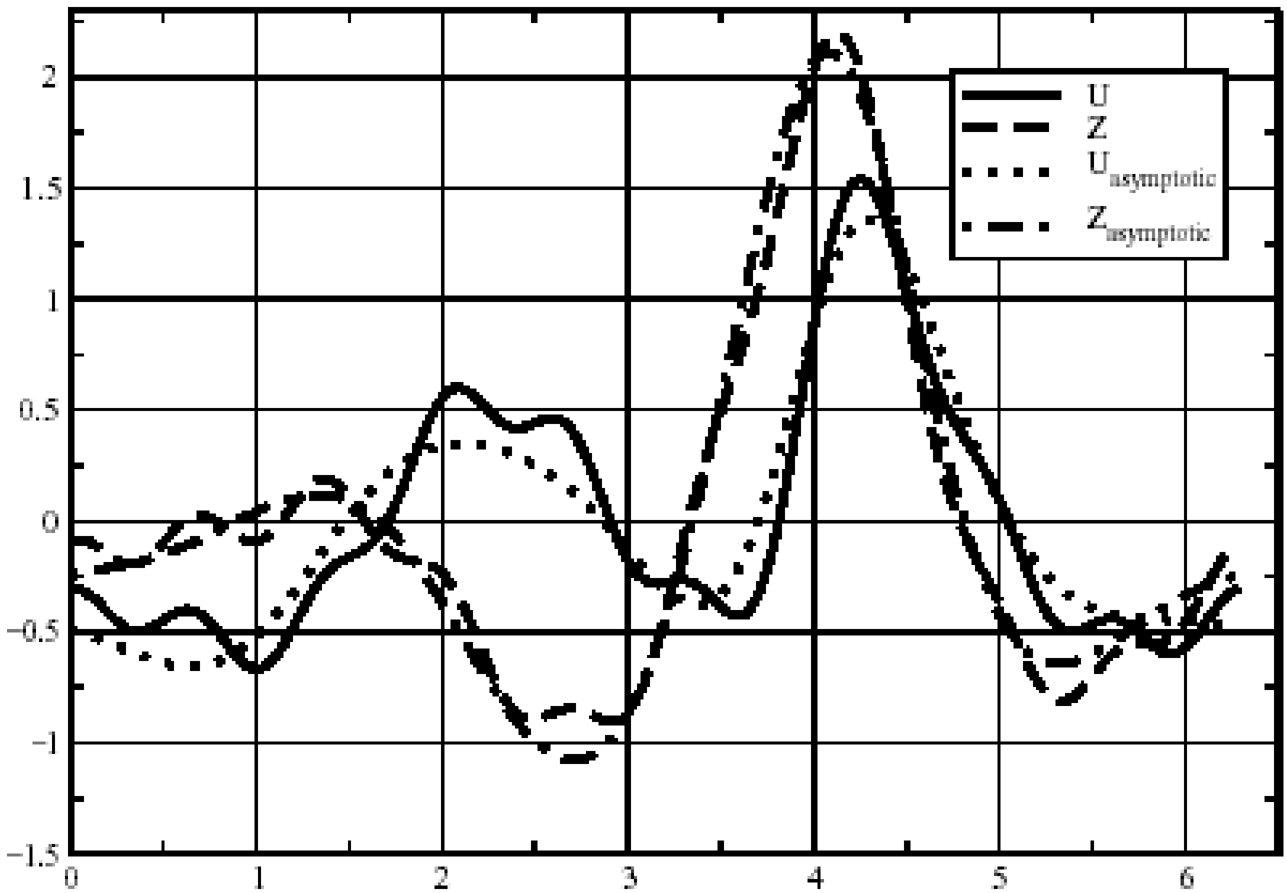
Uždaviniui spręsti buvo pasiūlytas reguliarizavimas:

$$Z_t + (HU)_x = -\frac{\varepsilon}{3}U_{xxx} - \frac{\varepsilon^2}{20}U_{xxxxx}.$$

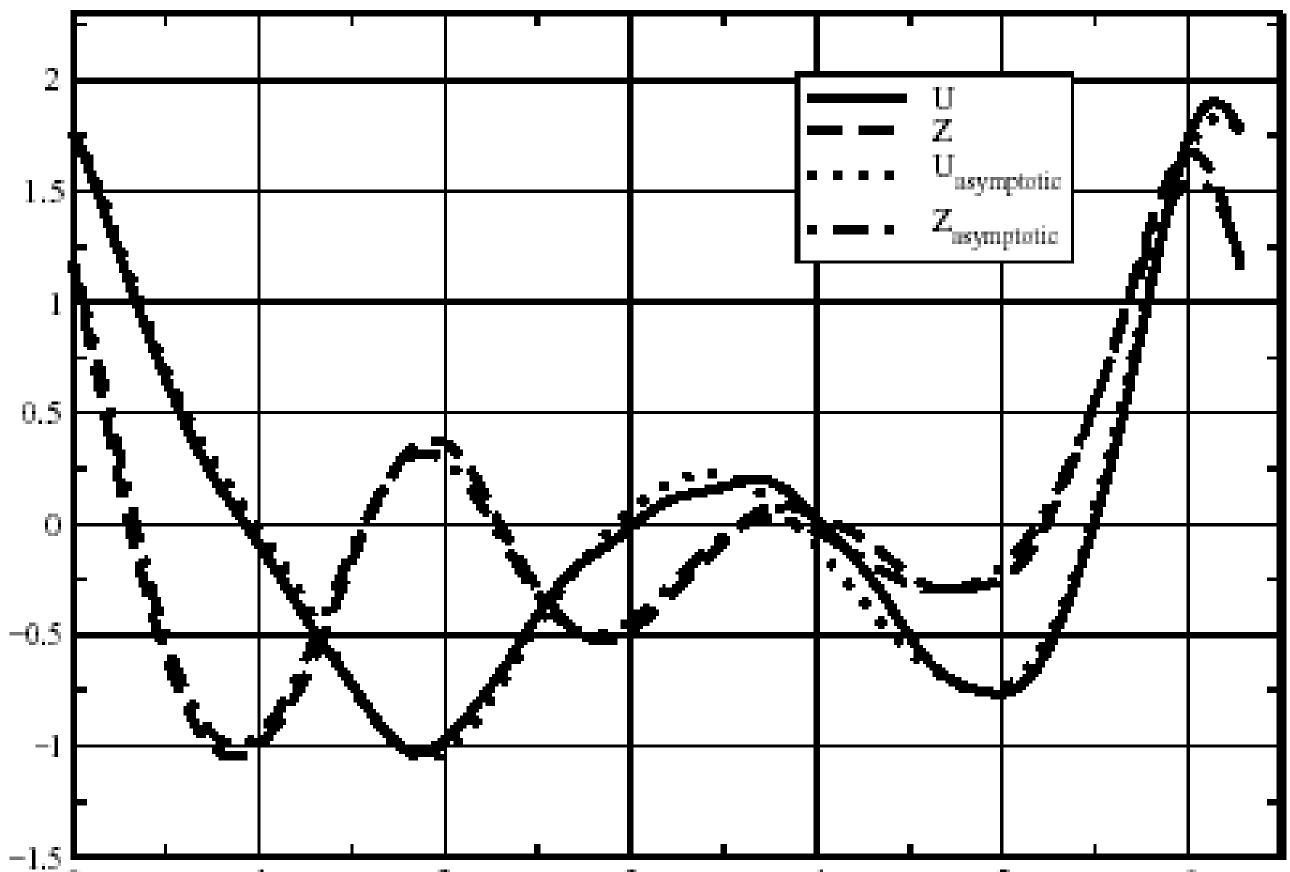
Asimptotinio artinio tikslumas didėja, kai $\varepsilon \to 0$.

Surasti tikslųjį sprendinį tuo sunkiau, kuo mažesnė mažojo parametro ε reikšmė.

Kai $\varepsilon \sim 10^{-5}$ arba $\varepsilon \sim 10^{-6}$, tai praktiškai neįmanoma su šiuolaikine skaičiavimo technika.



$\varepsilon = 0.015$



$\varepsilon = 0.01$

VIDURKINIMO PAGAL CHARAKTERISTIKAS APIBENDRINIMAI

- LĖTAI KINTANČIOS CHARAKTERISTIKOS
- GREITAI KINTANČIOS CHARAKTERISTIKOS
- NESUTRIKDYTOJI SISTEMA – TRIKAMPĖ
- DAUGIAMATIS ATVEJIS
- NEPERIODINĖS PRADINĖS SĄLYGOS
- KRAŠTINIS UŽDAVINYS

LĖTAI KINTANČIOS CHARAKTERISTIKOS

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j(\tau, \xi)\frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon f_j(\cdots), \tau = \varepsilon t, \xi = \varepsilon x$$

Charakteristikos

$$\frac{dX_j}{ds} = \lambda_j(s, X_j), \ \ X_j(s; \tau, \xi)\Big|_{s=\tau} = \xi$$

Charakteristiniai kintamieji

$$y_j = \frac{1}{\varepsilon} X_j(0; \tau, \xi)$$

Atskiras atvejis - charakteristikos priklauso tik nuo lėtojo laiko: $\lambda_j(\tau)$, $\qquad y_j = x - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \lambda_j(s)\, ds$

Asimptotikos struktūra (anzats)

$$u_j(t, x; \varepsilon) \approx v_j(\tau, \xi, y_j)$$

VIDURKINIMO OPERATORIUS

$$M_j^{\varepsilon}[g(\tau,\xi,y_1,y_2,\dots,y_n)] =$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\tau} g(s,X_j(s;\tau,\xi),\dots,$$
$$\dots,\tfrac{1}{\varepsilon}X_i(0;s,X_j(s;\tau,\xi)),\dots)\,ds$$

Atskiras atvejis, kai
$y_j = x - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_j(s)\,ds$:

$$M_j^{\varepsilon}[g] =$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\tau} g(s,\xi-\Lambda_j(\tau)+\Lambda_j(s),\dots,$$
$$\dots,y_j+\tfrac{1}{\varepsilon}(\Lambda_j(s)-\Lambda_i(s)),\dots)\,ds =$$
$$< g >_j (\tau,\xi,y_j)$$

Čia $\Lambda_j(\tau) = \int\limits_0^{\tau}\lambda_j(s)\,ds$

GREITAI KINTANČIOS CHARAKTERISTIKOS

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j(t,x)\frac{\partial u_j}{\partial x} = \varepsilon f_j(\cdots)$$

$$\frac{dX_j}{ds} = \lambda_j(s, X_j),\ \ X_j(s;t,x)\Big|_{s=t} = x$$

$$u_j(t,x) \approx v_j(\tau, y_j),\ \ y_j = X_j(0;t,x)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial \tau} = M[f_j]$$

$$M[g(\tau, y_1, \ldots, y_n)] =$$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T g(\tau, \ldots, X_i(0; s, X_j(s;t,x)), \ldots)\, ds$$

APIBENDRINIMAI: I

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j(t,x)\frac{\partial u_j}{\partial x} + \alpha_j(t,x)u_j = \varepsilon f_j(\cdots)$$

Ansatz

$$u_j(t,x;\varepsilon) \approx e^{-a_j(t,x)} v_j(\tau, y_j),$$

$$a_j(t,x) = \int\limits_0^t \alpha_j(s, X_j(s;t,x))\, ds$$

Vidurkinimas

$$M_j \left[e^{a_j(t,x)} f_j(\ldots, u_i, \ldots)\Big|_{u_i = e^{-a_i} v_i} \right]$$

APIBENDRINIMAI: II

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_j(t,x)\frac{\partial u_j}{\partial x} + \beta_j(t,x) = \varepsilon f_j(\cdots)$$

Anzats

$$u_j(t,x;\varepsilon) \approx v_j(\tau, y_j) - b_j(t,x),$$

$$b_j(t,x) = \int_0^t \beta_j(s, X_j(s;t,x))\,ds$$

Vidurkinimas

$$M_j\left[f_j(\ldots, u_i, \ldots)\Big|_{u_i = v_i - b_i} \right]$$

NESUTRIKDYTOJI SISTEMA – TRIKAMPĖ

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \varepsilon f_1(\cdots) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + a_{21} u_1 = \varepsilon f_2(\cdots) \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} + a_{31} u_1 + a_{32} u_2 = \varepsilon f_3(\cdots) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$u_1(x, t; 0) = \varphi(x - \lambda_1 t),$$

$$u_2(x, t; 0) = \psi(x - \lambda_2 t) - \\ - a_{21} \int_0^t \varphi(x - \lambda_2 t + (\lambda_2 - \lambda_1)s)\, ds$$

$\dots\dots$

DAUGIAMATIS ATVEJIS

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_j^i \frac{\partial u_j}{\partial x^i} = \varepsilon f_j(\cdots)$$

Anzats

$$u_j(t, x^1, \ldots, x^n) \approx v_j(\tau, y_j^1, \ldots, y_j^n),$$

$$y_j^i = x^i - \lambda_j^i t$$

Vidurkinimas

$$M_j[f_j] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_j(\cdots)\Big|_{y_k^i = y_j^i + (\lambda_j^i - \lambda_k^i)s} \, ds$$

NETIESINĖ DVIMATĖ BANGINĖ LYGTIS

$$u_{tt} - \Delta u + a u_x u_{xx} + \varepsilon b u_{xxxx} = 0,$$

$$\Delta \equiv \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$$

Ieškomas asimptotinis sprendinys

$$u \sim \varepsilon v(t, x, \tau, \eta; \varepsilon),\ \tau = \varepsilon t,\ \eta = \varepsilon y$$

Žinoma, kad

$$v \approx w^+(s^+, \tau, \eta) + w^-(s^-, \tau, \eta),\ s^\pm = x \pm t$$

Kadomcevo - Petviašvili lygtis

$$\pm \frac{\partial w^\pm}{\partial \tau} + a w^\pm \frac{\partial w^\pm}{\partial s^\pm} + b \frac{{}^3\partial w^\pm}{\partial {s^\pm}^3} = \frac{\partial^2 w^\pm}{\partial \eta^2}$$

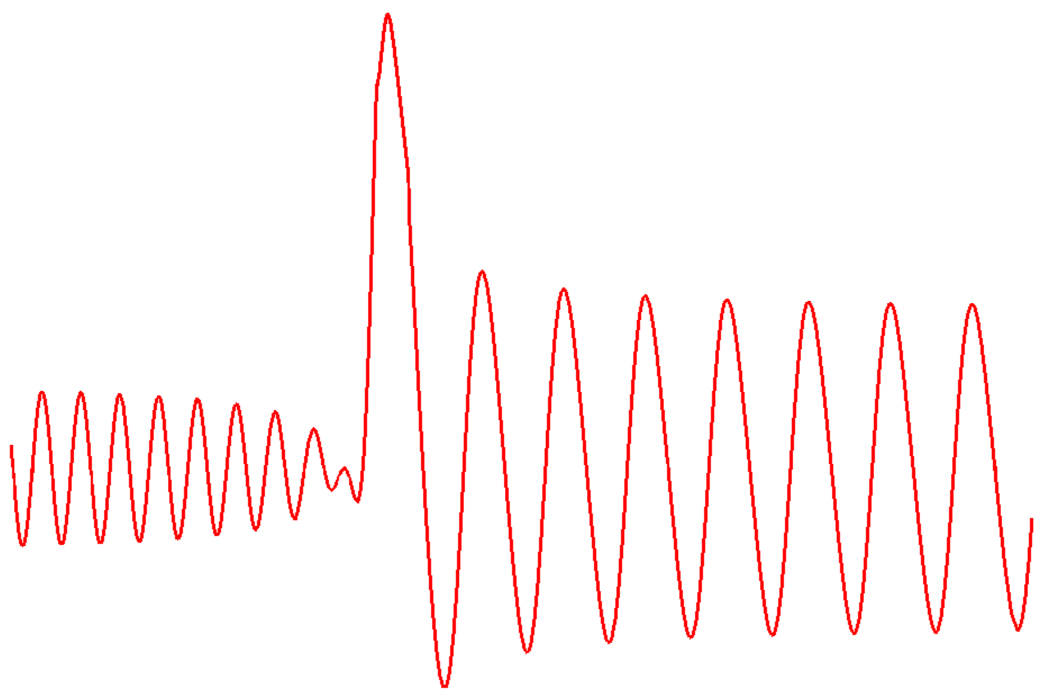
NEPERIODINĖS PRADINĖS SĄLYGOS

$$u_j(t,x;\varepsilon)\Big|_{t=0} = u_0(x) \equiv u_0(x+2\pi)$$

$$u_0(x) \in C^n_{2\pi}(R)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |u_0(x) - \varphi^{\pm}(x)| = 0$$

$$\varphi^{\pm}(x) \in C^n_{P^{\pm}}(R)$$



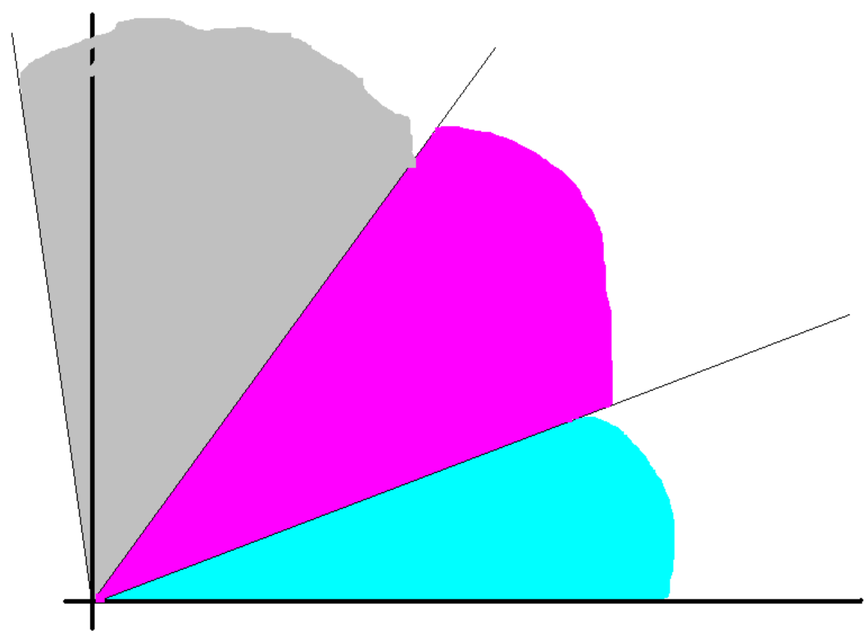
NETOLYGUSIS INTEGRALINIS VIDURKIS

Pažymėkime $F_j(r_1, r_2, \ldots, r_n; f(V))$ operatorių, apibrėžtą, kai
$r_1 < r_2 < \ldots < r_{j-1} < r_{j+1} < \ldots < r_n$: $F_j \equiv$

$$
\begin{cases}
f(v_1^+, v_2^+, \ldots, v_{j-1}^+, v_j, v_{j+1}^+, \ldots, v_n^+), & r_1 > 0; \\
f(v_1^-, v_2^+, \ldots, v_{j-1}^+, v_j, v_{j+1}^+, \ldots, , v_n^+), & \\
\qquad\qquad r_1 < 0, & r_2 > 0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
f(v_1^-, \ldots, v_m^-, v_{m+1}^+, \ldots, v_j, \ldots, , v_n^+), & \\
\qquad\qquad r_m < 0, & r_{m+1} > 0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
f(v_1^-, \ldots, v_m^-, v_{m+1}^-, \ldots, v_j, \ldots, , v_n^-), & r_n < 0.
\end{cases}
$$

Asimptotinis artinys ieškomas kaip tokios suvidurkintosios sistemos sprendinys:

$$\frac{\partial v_j}{\partial \tau}+\lambda_j\frac{\partial v_j}{\partial \xi}=M_j[F_j(\xi-\lambda_1\tau,\ldots,\xi-\lambda_n\tau;f_j(V))]$$



KRAŠTINĖS SĄLYGOS

Tarkime, kad galioja reikalavimas:

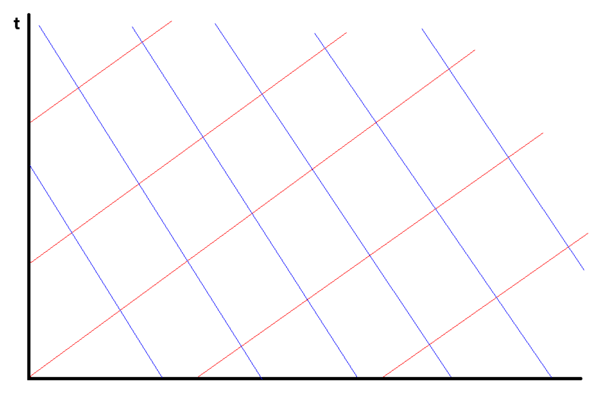
$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_m > 0 \geqslant \lambda_{m+1} > \ldots > \lambda_n.$$

Tada galima nagrinėti sistemą ne tik su pradinėmis, bet ir su kraštinėmis sąlygomis:

$$u_j(0, x; \varepsilon) = u_{0j}(x), \; j = 1, 2, \ldots, n, \; x \geqslant 0,$$

$$u_j(t, 0; \varepsilon) = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_{ji} u_i(t, 0, \varepsilon) + h_j(t),$$

$$j = 1, 2, \ldots, m, \; t \geqslant 0.$$



Konstruojamas tolygiai tinkamas srityje

$$t + x \leqslant \frac{c_0}{\varepsilon},\ t \geqslant 0,\ x \geqslant 0$$

asimptotinis sprendinys tokio pavidalo

$$v_j(\tau, \xi, y_j) = \begin{cases} v_j^+(\tau, \xi, y_j), & y_j \geqslant 0, \\ v_j^-(\tau, \xi, y_j), & y_j < 0. \end{cases}$$

Kraštinės ir pradinės sąlygos yra tokios:

$$v_j(0, \xi, y_j) = u_{0j}(y_j),\ j = 1, 2, \ldots, n,\ y_j \geqslant 0,$$

$$v_j = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_{ji} v_i(\tau, 0, -\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\, y_j) + h_j\left(\frac{y_j}{\lambda_j}\right),$$

$$j = 1, 2, \ldots, m,\ y_j < 0.$$

DAUGIAMAČIŲ NETIESINIŲ BANGŲ ASIMPTOTINIŲ ARTINIŲ KONSTRAVIMAS

$$U_t + A(U)U_x + B(U)U_y + C(U)U_z = o(1)$$

$$U(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Pavyzdžiui, hidrodinamikos lygčių sistema

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\nabla\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0,\ p = P(\rho)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\,(\rho\,\vec{v}) = 0$$

perrašoma tokiu pavidalu, kai

$U = colon\,(v_1, v_2, v_3, \rho)$

Matricos $A(U)$, $B(U)$, $C(U)$ atitinkamai yra:

$$\begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & \frac{P'_\rho}{\rho} \\ 0 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & 0 \\ \rho & 0 & 0 & v_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & \frac{P'_\rho}{\rho} \\ 0 & 0 & v_2 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & \frac{P'_\rho}{\rho} \\ 0 & 0 & \rho & v_3 \end{pmatrix}$$

DAUGIAMAČIOS SISTEMOS ASIMPTOTIKA

Pažymėkime lėtuosius kintamuosius

$$\tau = \varepsilon t,\ \eta = \varepsilon y,\ \zeta = \varepsilon z$$

ir ieškosime tokio pavidalo asimptotikos

$$U(t,x,y,z;\varepsilon) = U_0(\tau,\eta,\zeta) + \varepsilon U_1(t,x,\eta,\zeta;\varepsilon)$$

$$U_{0\tau} + B(U_0)U_{0\eta} + C(U_0)U_{0\zeta} = 0$$

$$U_{1t} + A_0 U_{1x} =$$

$$-\varepsilon \Big(A_1(U_1)U_{1x} + B_0 U_{1\eta} + B_1(U_1)U_{0\eta} +$$

$$+ C_0 U_{1\zeta} + C_1(U_1)U_{0\zeta} \Big)$$

Jei sistemos nesutrikdytoji (t. y. kai $\varepsilon = 0$) dalis yra hiperbolinė, ją galima perrašyti Rymano invariantais: egzistuoja tokia neišsigimusi matrica $R(\tau, \eta, \zeta)$, kad

$$R^{-1}A_0 R = \Lambda =$$

$$= diagonal\,(\lambda_1(\tau, \eta, \zeta), \lambda_2(\tau, \eta, \zeta), \ldots, \lambda_n(\tau, \eta, \zeta))$$

Pažymėję
$R(t, \eta, \zeta)U_1(t, \eta, \zeta; \varepsilon) =$
$= U^1(t, \eta, \zeta; \varepsilon) = (u_1^1, u_2^1, \ldots, u_n^1)$,
turime
$\frac{\partial}{\partial t}U_1 = \varepsilon R_\tau^{-1}U^1 + R^{-1}U_t^1$,
$\frac{\partial}{\partial x}U_1 = R^{-1}U_x^1$
ir gauname

NAUJAS ASIMPTOTINIO INTEGRAVIMO UŽDAVINYS

$$\frac{\partial u_j^1}{\partial t} + \lambda_j(\tau, \eta, \zeta)\frac{\partial u_j^1}{\partial x} =$$

$$= \varepsilon f_j(\tau, \eta, \zeta, U^1, U_x^1, U_\eta^1, U_\zeta^1)$$

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f_{jik} u_i^1 \frac{\partial u_k^1}{\partial x} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} g_{ji} \frac{\partial u_i^1}{\partial \eta} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} h_{ji} \frac{\partial u_i^1}{\partial \zeta} + \sum_{i=1}^{n} p_{ji} u_i^1$$

Kai $\varepsilon = 0$, sistemos sprendinys yra nepriklausomos bėgančiosios bangos $u(x - \lambda_j(0,0,0)\,t)$.

Sutrikdytoji sistema turi didelėje kintamųjų srityje
$\Omega_{\frac{c_0}{\varepsilon}} = \left\{(t,x,y,z) :\ 0 \leqslant t + |x| + |y| + |z| \leqslant \frac{c_0}{\varepsilon}\right\}$
tolydžiai diferencijuojamą sprendinį.

Tiesioginis asimptotinis skleidinys turės sekuliarinius narius εt ir dėl jų nebus tinkamas, kai $t = O\left(\varepsilon^{-1}\right)$.