

Techmatų olimpiados 2015 uždavinukai

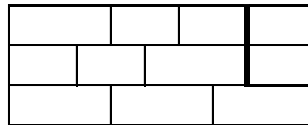
1. 2×2 lentelės langeliuose užrašyti keturi skaičiai. Prie kiekvieno skaičiaus galima pridėti bet kokį skaičių, tačiau tokį patį skaičių reikia pridėti ir prie kaimyniniuose langeliuose esančių skaičių. Kaimyniniais langeliais laikomi tie, kurie turi bendrą kraštinę.

Pavyzdys: prie pirmo langelio pridedame 6:

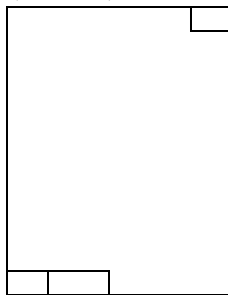
2	1	=>	2+6	1+6	=>	8	7
-5	5		-5+6	5		1	5

Ar įmanoma padaryti taip, kad visi šioje lentelėje esantys skaičiai taptų lygūs 0? (5 taškai)

2. Sieną statoma tik iš horizontalių plytų 2×1 ir 3×1 . Sieną laikoma „tvirta“, jeigu nėra vertikalių tarpų besijungiančių per du aukštus. Netvirtos sienos pavyzdys:



Ar šį pradėta statyti 11×12 (11 plotis, 12 aukštis) siena gali būti „tvirta“ siena? Jei taip, tai kiek tokių „tvirtų“ sienų egzistuoja? (5 taškai)



3. Ar egzistuoja toks realiųjų skaičių rinkinys $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kuriam galiotų savybės:

$$\sum_{i=0}^n x_i < 1,$$

$$\sum_{i=0}^n x_i^3 > 1,$$

$$x_i < 1, i = 0, 1, \dots, n. \quad (5 \text{ taškai})$$

4. Sandėlyje stovi 66 statinės, kurios sunumeruotos nuo 1 iki 66. Kiekvienoje statinėje yra po 66 aukso luitus ir visi jie sveria po n miligramų ($n \in \mathbb{N}$). Naktį vagys įsilaužė į sandėlį ir pavogė visus aukso luitus iš vienos statinės ir vietoje pavogtų aukso luitų paliko padirbtus aukso luitus. Visi padirbti aukso luitai sveria po m miligramų ($m \in \mathbb{N}$) ir nuo tikrųjų skiriasi labai minimaliai (svoris skiriasi iki 2%). Ryte sargas žinojo tik tai, kad aukso luitai pavogti iš kažkurios vienos statinės ir tikri luitai pakeisti padirbtaisiais, kurių svorio skirtumas nuo tikrųjų yra labai minimalus. Sargas sugalvojo unikalią strategiją, kuri turėtų padėti išsiaiškinti nusikaltimo aplinkybes. Jis pasiėmė vienratį karutį, nuriedėjo su juo į sandėlį, pritaikęs savo strategiją susikrovė krūvą aukso luitų ir visą krovinį suvertė ant svarstyklių. Svarstyklėse užsidedę skaičius 1976465 mg. Sargas pasiėmė lapuką, atliko porą veiksmų ir sušuko: - Eureka!

- 1) Kokią strategiją pritaikė sargas sandėlyje imdamas aukso luitus iš statinių? (2 taškai)
- 2) Kiek sveria vienas tikras aukso luitas? (1 taškas)
- 3) Kiek sveria vienas netikras aukso luitas? (1 taškas)
- 4) Iš kurios statinės buvo pavogti aukso luitai? (1 taškas)