Vilniaus Gedimino technikos universitetas
Matematinio modeliavimo katedra

Seminaras

Elipsinės lygties su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis skirtuminio uždavinio savybių tyrimas taikant M-matricų savybes

Regimantas Čiupaila

2022

Pranešimas parengtas pagal straipsnį:

M. Sapagovas, O. Štikonienė, K. Jakubėlienė, R. Čiupaila

Finite difference method for boundary value problem for nonlinear elliptic equation with nonlocal conditions.

Boundary Value Problems (2019),

http://doi.org/10.1186/s13661-019-1202-4

Pranešimo struktūra

- Pranešime nagrinėjamas dvimatės netiesinės elipsės lygties baigtinių skirtumų schemos konvergavimas stačiakampėje srityje su integralinėmis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis:
  – Formuluojamas skirtuminis uždavinys paklaidai tirti,
  – Aptariamos M-matricų, naudojamų tyrimui, savybės,
  – Skirtuminių lygčių sistemos sprendinio paklaidai vertinti konstruojama konkreti mažorantė ir gaunamas šios paklaidos įvertis.
  – Pateikiami skaitinio eksperimento rezultatai.

Pranešimo struktūra

- Daugeliu atvejų, nagrinėjant elipsines lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis, skirtuminio uždavinio matrica yra charakterizuojama savybėmis, būdingomis M-matricoms. Tai buvo mūsų naudota ir anksčiau, įrodant iteracinių metodų konvergavimą tiek tiesinėms, tiek netiesinėms elipsinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis.
- Straipsnyje pasiūlyta M-matricų taikymo teoriniam skirtuminių lygčių sistemos tyrimui idėja, jog M-matricų teorija galėtų būti traktuojama kaip maksimumo principo išplėtimas tuo atveju, kai skirtuminių lygčių sistemos matrica nėra diagonaliai vyraujanti.
- Apytikslio sprendinio paklaida įvertinama maksimumo normoje.

Diferencialinio uždavinio formulavimas

Baigtinių skirtumų metodu nagrinėsime netiesinę elipsinę lygtį

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,u), \quad (x,y) \in D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \tag{1}$$

su integraline sąlyga

$$u(0,y) = \gamma \int_0^1 u(x,y)dx + \mu_1(y), \quad 0 < y < 1, \tag{2}$$

ir *Dirichlet* tipo kraštinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned} &u(1,y) = \mu_2(y), \quad 0 \le y \le 1, \\ &u(x,0) = \mu_3(x), \quad u(x,1) = \mu_4, \quad 0 \le x \le 1. \end{aligned} \tag{3}$$

μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 – žinomos, pakankamai glodžios funkcijos, tenkinančios suderinamumo sąlygas taškuose ***(1, 0)*** ir ***(1, 1).***

M-matricos

$$Ax = f;\ \ A=\{a_{ij}\};\ \ a_{ii} > 0;\ \ a_{ij} \le 0;\ \ i \ne j \qquad (*)$$

- **Apibrėžimas (M-matrica)**

  Kvadratinė matrica $A = \{a_{ij}\},\ i, j = 1,\ldots, n$ yra vadinama M-matrica, jei $a_{ij} \le 0$, kai $i \ne j$ ir ∃ atvirkštinė matrica A^{-1} , kurios elementai yra neneigiami $A^{-1} \ge 0$.

- **Kiti M-matricos apibrėžimai:**

  A yra M-matrica, jei išpildytos dvi sąlygos:

  (*) + (k), k = 2, 3, …*

(**) $\exists A^{-1}$ ir $A^{-1} \ge 0$

(***) $Re(\lambda) > 0$

(****) A yra monotoninė matrica, t.y. $Ax \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$

(*****) $A = aI - B,\ a > \rho(B),\ B \ge 0,\ \rho(B)$ – matricos spektrinis spindulys

ir t.t. (virš 50 variantų), (*A.Berman, R.Plummons. Nonnegative matrices in Mathematical Science, 1994*)

M-matricos pavadinimas

- Atrodo, kad M-matricos pavadinimą pirmasis panaudojo *Aleksandras Ostrovkis Hermano Minkovskio*, gimusio ir augusio Kaune, garbei.
- Minkovskis įrodė, kad jei Z-matricos visų eilučių sumos yra teigiamos, tai tos matricos determinantas yra teigiamas.
- Z-matricos yra tokios matricos, kurių nediagonaliniai elementai yra neteigiami:
  - $\boldsymbol{Z = (z_{ij});\ \ z_{ij} \le 0,\ \ i \neq j.}$

M-matricos ir iteracinio metodo konvergavimas

- Reguliarusis dėstinys (*regular splitting*)

  - Jei $\boldsymbol{A = M - N}$, $\boldsymbol{M}$ yra M-matrica, $\boldsymbol{N \geq 0}$, tai $\boldsymbol{\rho\,(M^{-1} N) < 1}$.

  - $\boldsymbol{Ax = f \;\; => \;\; Mx^{n+1} = Nx^{n} + f \;\; => \;\; \rho\,(M^{-1} N) < 1}$
  - Iteracinis metodas konverguoja.

M-matricos. Skirtuminio metodo paklaidos įvertis

Diskretusis maksimumo principas

(S.Gerschgorin, 1930; L.Collatz, 1951; G.Forsythe, W.Wasow, 1953; A.Samarskii, 1977)

$$Au = f; \;\; a_{ii} > 0; \;\; a_{ij} \leq 0; \qquad a_{ii} - \sum_{i=1, j \neq i}^{n} a_{ij} \geq 0 \qquad (\sim)$$

Sąlygos (~) =>	**Diskretusis maksimumo principas =>**	**Palyginimo teorema** $Au = f;\ Aw = g,$ => $g \geq 0,\ \lvert f\rvert \leq g$ => $\lvert u\rvert \leq w$	**Mažorantė** w =>	$\lvert u-u_k\rvert \leq w \approx O(h^2)$

M-matricų teorija

Sąlygos (~) =>	$Re\,(\lambda) > 0$ => $(A^{-1} \geq 0)$	**Palyginimo teorema =>**	**Mažorantė** w =>	$\lvert u-u_k\rvert \leq w \approx O(h^2)$

Išvada: Kai vietoje sąlygų (~) imame sąlygą „M-matrica“, tai nereikia sąlygos

- $a_{ii} - \sum_{i=1, j \neq i}^{n} a_{ij} \geq 0$ (diagonalinio vyravimo)

Diferencialinio uždavinio formulavimas

Baigtinių skirtumų metodu nagrinėsime netiesinę elipsinę lygtį

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u), \quad (x, y) \in D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \tag{1}$$

su integraline sąlyga

$$u(0, y) = \gamma \int_0^1 u(x, y)dx + \mu_1(y), \quad 0 < y < 1, \tag{2}$$

ir *Dirichlet* tipo kraštinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned} &u(1, y) = \mu_2(y), \quad 0 \le y \le 1, \\ &u(x, 0) = \mu_3(x), \quad u(x, 1) = \mu_4, \quad 0 \le x \le 1. \end{aligned} \tag{3}$$

$\boldsymbol{\mu_1}$, $\boldsymbol{\mu_2}$, $\boldsymbol{\mu_3}$, $\boldsymbol{\mu_4}$ – žinomos, pakankamai glodžios funkcijos, tenkinančios suderinamumo sąlygas taškuose ***(1, 0)*** ir ***(1, 1).***

Prielaidos:

Pasirenkame, jog šios prielaidos yra teisingos:

- ***H1:***
  - $\frac{\partial f}{\partial u} \geq 0$ visiems ***(x, y)*** $\boldsymbol{\epsilon}$ ***D*** ir ***u***.
- ***H2:***
  - γ yra duotas realus skaičius, kur $\boldsymbol{0 \leq \gamma \leq 2 - \delta, \ \delta > 0}$.

Remiantis prielaidomis ***H1*** ir ***H2*** ir tyrimu straipsnyje* egzistuoja vienintelis toliau nagrinėjamos skirtuminių lygčių sistemos sprendinys.

* Sapagovas, M., Griškonienė, V., Štikonienė, O.: Application of m-matrices to numerical investigation of a nonlinear elliptic equation with an integral condition. Nonlinear Anal., Model. Control 22(4), 489–504 (2017)

Skirtuminis uždavinys, atitinkantis diferencialinį uždavinį

- Toliau nagrinėjamas skirtuminis uždavinys, atitinkantis diferencialinį uždavinį:

$$\delta_x^2 U_{ij} + \delta_y^2 U_{ij} = f_{ij}(U_{ij}), \quad i,j = \overline{1, N-1}, \tag{4}$$

$$U_{0j} = \gamma h \left(\frac{U_{0j} + U_{Nj}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} U_{ij} \right) + (\mu_1)_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \tag{5}$$

$$U_{Nj} = (\mu_2)_j, \quad U_{i0} = (\mu_3)_i, \quad U_{iN} = (\mu_4)_i, \quad i,j = \overline{0, N}, \tag{6}$$

kur
$$h = \frac{1}{N}, \quad f_{ij}(U_{ij}) = f(x_i, y_j, U_{ij}),$$

ir
$$\delta_x^2 U_{ij} = \frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + U_{i+1,j}}{h^2}, \quad \delta_y^2 U_{ij} = \frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} + U_{i,j+1}}{h^2}.$$

Skirtuminio uždavinio formulavimas paklaidai

- Pažymėjimai:
  - $u_{ij} = u(x_i , y_j)$ – diferencialinio uždavinio sprendinys,
  - U_{ij} – skirtuminio uždavinio sprendinys.
- Kaip minėta, remiantis prielaidomis ***H1*** ir ***H2***, egzistuoja vienintelis skirtuminių lygčių sistemos (4) – (6) sprendinys.
- Toliau nagrinėsime šio sprendinio paklaidos įvertį ir skirtuminės schemos (4) – (6) konvergavimą.
- Pažymime paklaidą:

$$z_{ij} = u_{ij} - U_{ij}$$

Skirtuminio uždavinio formulavimas paklaidai

Tarkime, kad diferencialinis uždavinys (1) – (3) turi vienintelį, pakankamai glodų sprendinį, kurio dalinės išvestinės iki ketvirtosios eilės yra aprėžtos. Tada

$$\delta_x^2 u_{ij} + \delta_y^2 u_{ij} = f_{ij}(u_{ij}) + R_{ij}(h), \quad i,j = \overline{1, N-1},$$

$$u_{0j} = \gamma h\left(\frac{u_{0j} + u_{Nj}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_{ij}\right) + (\mu_1)_j + R_j(h), \quad j = \overline{1, N-1},$$

kur $u_{Nj} = (\mu_2)_j, \qquad u_{i0} = (\mu_3)_i, \qquad u_{iN} = (\mu_4)_i, \quad i,j = \overline{0, N},$

$$d_{ij} = \frac{\partial f_{ij(u_{ij})}}{\partial u} \geq 0, \quad |R_{ij}(h)| \leq \frac{h^2}{6} M_4, \quad |R_j(h)| \leq \frac{h^2}{12} M_2 \gamma < \frac{h^2}{6} M_2$$

$$M_4 = max\left(\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|, \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|\right), \quad M_2 = max\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|.$$

Iš (4) – (6) ir šios sistemos išplaukia uždavinio formulavimas paklaidai:

Skirtuminio uždavinio formulavimas paklaidai

$$-\delta_x^2 z_{ij} - \delta_y^2 z_{ij} + d_{ij} z_{ij} = -R_{ij}(h), \quad i,j = \overline{1, N-1}, \tag{7}$$

$$z_{0j} - \gamma h\left(\frac{z_{0j} + z_{Nj}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} z_{ij}\right) = R_j(h), \quad j = \overline{1, N-1}, \tag{8}$$

$$z_{Nj} = z_{i0} = z_{iN} = 0, \quad i,j = \overline{0, N}, \tag{9}$$

kur

$$d_{ij} = \frac{\partial f_{ij(u_{ij})}}{\partial u} \geq 0, \quad |R_{ij}(h)| \leq \frac{h^2}{6} M_4, \quad |R_j(h)| \leq \frac{h^2}{12} M_2 \gamma < \frac{h^2}{6} M_2$$

$$M_4 = max\left(\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|, \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|\right), \quad M_2 = max\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|. \tag{10}$$

- **Pastaba:**
  - Sąlygos (9) reiškia, kad lygybės (7) kairėje pusėje nėra kintamųjų z_{Nj}, z_{i0} ir z_{iN}
- Toliau aptarsime sprendinio paklaidos įvertį ir nagrinėsime skirtuminės schemos (4) – (6) konvergavimą

Skirtuminio uždavinio paklaidai tyrimas

Įvertinsime paklaidą z_{ij} kaip sistemos (7) – (10) sprendinį. Pertvarkykime šią sistemą į dvi žemesnės eilės sistemas.

Pirmiausia iš (8) išreiškiame z_{0j}:

$$z_{0j} = \alpha \sum_{i=1}^{N-1} z_{ij} + \beta R_j(h), \quad j = \overline{1, N-1}, \qquad (11)$$

kur

$$\alpha = \frac{\gamma h}{1 - \frac{\gamma h}{2}}, \ \beta = \frac{1}{1 - \frac{\gamma h}{2}}$$

Atsižvelgiant į ***H2*** ir tai, kad $\boldsymbol{0 < h \leq 1/2}$, turime

$$1 \leq \frac{1}{1 - \frac{\gamma h}{2}} \leq 2,$$

H2: $0 \leq \gamma \leq 2 - \delta$

Iš čia

$$0 \leq \alpha \leq 2\gamma h, \ 1 \leq \beta \leq 2.$$

Skirtuminio uždavinio paklaidai tyrimas

Toliau, įstatydami z_{0j} į (7), gauname:

$$-\delta_x^2 z_{ij} - \delta_y^2 z_{ij} + d_{ij} z_{ij} = -R_{ij}(h), \quad i = \overline{2, N-1}, \quad j = \overline{1, N-1}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{h^2}\left(-\alpha \sum_{i=1}^{N-1} z_{ij} + 2z_{1j} - z_{2j}\right) - \delta_y^2 z_{1j} + d_{1j} z_{1j} = -R_{1j}(h) + \frac{\beta R_j(h)}{h^2}, \; j = \overline{1, N-1} \tag{13}$$

$$z_{Nj} = z_{i0} = z_{iN} = 0, \quad i, j = \overline{0, N}. \tag{14}$$

- Tuo būdu turime dvi atskiras žemesnės eilės sistemas:
  - (12), (13), (14) ir kita sistema (11): $z_{0j} = \alpha \sum_{i=1}^{N-1} z_{ij} + \beta R_j(h), \quad j = \overline{1, N-1},$
- Sistemoje (12), (13) ir (14) yra įtraukti tik nežinomieji z_{ij}, $i, j = 1, ..., N-1$ srities D vidiniuose taškuose. Taigi lygčių ir nežinomųjų skaičius sistemoje yra lygus $(N-1)^2$. Be to, nežinomieji z_{0j} išraiškoje (11) yra išreikšti nežinomaisiais z_{ij}, $j = 1, ..., N-1$. Tai leidžia iš pradžių spręsti sistemą (12), (13) ir (14), ir po to sistemą (11).

Matricinė sistemos forma

Dabar užrašysime sistemą (12), (13) ir (14) matricine forma:

$$\boldsymbol{A\,z = R}, \tag{15}$$

kur $\boldsymbol{z = \{z_{ij}\}}$ yra $\boldsymbol{(N\text{-}1)^2}$ matavimo vektorius, o

$\boldsymbol{R = \{r_{ij}\}}$ yra $\boldsymbol{(N\text{-}1)^2}$ matavimo vektorius su koordinatėmis

$$r_{ij} = \begin{cases} -R_{ij}(h), & i = \overline{2, N-1}, j = \overline{1, N-1}, \\ -R_{1j}(h) + \dfrac{\beta R_j(h)}{h^2}, & i = 1, j = \overline{1, N-1}. \end{cases}$$

Matricinė sistemos forma

Suformuojame matricą ***A*** :

$$\mathrm{A} = \boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D},$$

kur $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_2$ yra $(N\text{-}1)^2$ eilės kvadratinė matrica, atitinkanti skirtuminį operatorių $-\delta_x^2 - \delta_y^2$

D yra diagonalinė matrica, kurios įstrižainės elementai yra $\boldsymbol{d_{ij}}$, apibrėžti sąlygomis (10): $d_{ij} = \frac{\partial f_{ij(u_{ij})}}{\partial u} \geq 0$

C yra sudaryta iš koeficientų $\boldsymbol{h^2\alpha}$ prie kintamųjų z_{ij}, o tai reiškia, kad ***C*** yra blokinė matrica

$$C = diag(C_1, C_1, \ldots, C_1), \quad C_1 = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \ldots & \alpha \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Matricų $\boldsymbol{C_1}$ ir ***C*** eilė – ***(N-1).***

M-matricų savybės

Toliau pasinaudosime keletu M-matricų savybių. Kai kurias savybes, taikomas skirtuminių lygčių sistemai $\boldsymbol{A\,z = R}$ (15) suformuluosime kaip naujas lemas.

Apibrėžimas (M-matrica)

Kvadratinė matrica $\boldsymbol{A = \{a_{kl}\},\ k,\ l = 1,\ldots,\ n}$ yra vadinama M-matrica, jei $\boldsymbol{a_{kl} \le 0}$, kai $\boldsymbol{k \ne l}$ ir $\exists$ atvirkštinė matrica A^{-1}, kurios elementai yra neneigiami $\boldsymbol{A^{-1} \ge 0}$.

Lema 1:

Jei matrica $\boldsymbol{A}$ yra tokia, kad $\boldsymbol{a_{kl} < 0\ (k \ne l)}$, tai tokie teiginiai yra ekvivalentūs:

- $\boldsymbol{A^{-1}}$ egzistuoja ir $\boldsymbol{A^{-1} \ge 0}$;
- Visų matricos $\boldsymbol{A}$ tikrinių reikšmių realiosios dalys yra teigiamos: $\boldsymbol{Re\,\lambda(A) > 0}$.

M-matricų savybės

Lema 2:

Skirtuminių lygčių sistemos $\boldsymbol{A\,z = R}$ matricos $\boldsymbol{A}$ įstrižainės elementai yra teigiami.

A $= \boldsymbol{\Lambda - C + D}$. Matricos $\boldsymbol{\Lambda}$ įstrižainės elementai yra $\boldsymbol{4/h^2}$, matricos $\boldsymbol{D}$ įstrižainės elementai yra neneigiami ($\boldsymbol{d_{ij} \geq 0}$ pagal hipotezę ***H1***). Matricos $\boldsymbol{C}$ įstrižainės elementai yra $\boldsymbol{h^{-2}\alpha}$ arba $\boldsymbol{0}$. Tada matricos A įstrižainės elementai yra bent jau tokie, kad

$$\frac{4}{h^2} + d_{ij} - \frac{\alpha}{h^2} > 0,$$

nes $\boldsymbol{0 \leq \alpha \leq 2\gamma h}$.

M-matricų savybės

Lema 3:

Skirtuminių lygčių sistemos paklaidoms $\boldsymbol{A\,z = R}$ matricos $\boldsymbol{A}$ nediagonaliniai elementai yra neteigiami.

$\boldsymbol{A = \Lambda - C + D}$. Nediagonaliniai matricos $\boldsymbol{\Lambda}$ elementai yra $\boldsymbol{-h^{-2}}$ arba $\boldsymbol{0}$, nediagonaliniai matricos $\boldsymbol{C}$ elementai yra $\boldsymbol{h^{-2}\alpha}$ arba $\boldsymbol{0}$, o matrica $\boldsymbol{D}$ yra diagonalinė matrica.

M-matricų savybės

Lema 4:

Visos matricos $\boldsymbol{\Lambda - C}$ tikrinės reikšmės yra teigiamos.

Kai $\boldsymbol{d_{ij} = 0}$, tikrinių reikšmių uždavinys, atitinkantis skirtuminių lygčių sistemai paklaidai (12) – (14) yra:

$$\delta_x^2 v_{ij} + \delta_y^2 v_{ij} + \lambda v_{ij} = 0, \quad i,j = \overline{1, N-1},$$

$$v_{0j} - \gamma h \left(\frac{v_{0j} + v_{Nj}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} v_{ij} \right) = 0, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$v_{Nj} = v_{i0} = v_{iN} = 0, \quad i,j = \overline{0, N}.$$

Šis tikrinių reikšmių uždavinys yra ekvivalentus tikrinių reikšmių uždaviniui matricai $\boldsymbol{A_1 = \Lambda - C}$ (**). Iš įrodymų straipsnyje** taip pat išplaukia, kad visos matricos $\boldsymbol{A_1}$ tikrinės reikšmės yra teigiamos, kai $\boldsymbol{0 \le \gamma \le \gamma_0}$, $\boldsymbol{\gamma_0 \approx 3.42}$.

** Štikonienė, O., Sapagovas, M., Čiupaila, R.: On iterative methods for some elliptic equations with nonlocal conditions. Nonlinear Anal., Model. Control 19(3), 517–535 (2014)

M-matricų savybės

Iš ***Lemų 1 – 4*** išplaukia išvada:

Išvada:

Matricos $\Lambda - C$ ir $A = \Lambda - C + D$ yra M-matricos, todėl $(\Lambda - C)^{-1} \geq 0$, $A^{-1} \geq 0$.

Toliau skirtuminių lygčių sistemai $Az = R$ sukonstruosime mažorantę ir įvertinsime paklaidą z. Tam reikės pasiremti dar keletu M-matricų savybių, pritaikytų skirtuminių lygčių sistemos sprendinio įvertinimui.

Nagrinėkime lygčių sistemą

$$Au = f, \tag{16}$$

kur A yra M-matrica.

M-matricų savybės

Lema 5:

Jei sistemos $\boldsymbol{Au = f}$ matrica $\boldsymbol{A}$ yra M-matrica ir $\boldsymbol{f \geq 0}$, tada $\boldsymbol{u \geq 0}$.

Teiginys išplaukia iš to, kad $\boldsymbol{u = A^{-1} f}$ ir $\boldsymbol{A^{-1} \geq 0, f \geq 0}$.

Lema 6 (*palyginimo teorema*):

Tegu $\boldsymbol{u}$ ir $\boldsymbol{w}$ yra dviejų sistemų

$$\boldsymbol{Au = f} \quad \text{ir} \quad \boldsymbol{Aw = g}$$

sprendiniai. Čia $\boldsymbol{A}$ yra M-matrica, $\boldsymbol{g \geq 0}$.

Tada, jei $|\boldsymbol{f}| \leq \boldsymbol{g}$, tai $|\boldsymbol{u}| \leq \boldsymbol{w}$.

Kadangi

$\boldsymbol{A^{-1} \geq 0,}$ tai $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{A^{-1} f}| \leq |\boldsymbol{A^{-1}}|\,|\boldsymbol{f}| \leq \boldsymbol{A^{-1}}\,|\boldsymbol{f}| \leq \boldsymbol{A^{-1} g = w}.$

M-matricų savybės

Pastaba:

Papildomai tarkime, kad M-matrica A yra diagonaliai vyraujanti silpnąja prasme

$$a_{kk} \geq \sum_{l=1, l \neq k}^{n} |a_{kl}|, \quad a_{kl} \leq 0 \qquad (17)$$

Tuomet skirtuminių lygčių sistemą $\boldsymbol{Au = f}$ galima interpretuoti kaip gautą iš elipsinės lygties su *Dirichlet* kraštine sąlyga. Nelygybė (17) garantuoja, kad sistemai galioja maksimumo principas, ir ***Lema 6*** sutampa su iš maksimumo principo išplaukiančia palyginimo teorema. Funkcija ***w***, minima ***Lemoje 6,*** yra vadinama mažorante.

Šia prasme M-matricų teorija gali būti traktuojama kaip maksimumo principo išplėtimas tam atvejui, kai skirtuminių lygčių sistemos matrica nėra diagonaliai vyraujanti.

M-matricų savybės

Lema 7:

Tarkime $\boldsymbol{u}$ ir $\boldsymbol{w}$ yra dviejų sistemų

$$(A + D)\, u = f \quad \text{ir} \quad Aw = g$$

sprendiniai. Čia A yra M-matrica, $D \geq 0$ yra diagonalinė matrica ir $g \geq 0$.

Tada, jei $|f| \leq g$, tai $|u| \leq w$.

Kadangi $D \geq 0$, o A yra M-matrica, tai $A^{-1} \geq (A+D)^{-1} \geq 0.$

Taigi $|u| \leq (A+D)^{-1} |f| \leq A^{-1} g = w.$

Pastaba:

Iš nelygybės $|u| \leq w$ išplaukia, kad $|u_k| \leq w_k$. Taigi ***Lemos 6*** ir ***Lemos 7*** teiginiai leidžia interpretuoti, jog

$$\max_{1 \leq k \leq n} |u_k| \leq \max_{1 \leq k \leq n} w_k. \quad \|\mathbf{u}\|_\infty \leq \|\mathbf{w}\|_\infty, \quad \|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |u_{ij}|.$$

Mažorantės sudarymas

Skirtuminių lygčių sistemos $\boldsymbol{Az = R}$ sprendiniui (paklaidai z) įvertinti konstruojame mažorantę, pasinaudodami ***Lemos 6*** ir ***Lemos 7*** teiginiais.

Apibrėžkime funkciją ***w(x, y):***

$$w(x,y) = \frac{Mh^2}{\varepsilon 24}\left(1 - \varepsilon x^2 - \varepsilon y^2 - (1-2\varepsilon)x\right) \qquad (18)$$

kur $M_4 = max\left(\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|, \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|\right)$, $M_2 = max\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|$, $M = max\,(M_2, M_4)$,

$\boldsymbol{\varepsilon = \delta/13,\ \delta = 2 - \gamma}$. Kadangi $\boldsymbol{0 \le \gamma \le 2 - \delta}$, tai $\boldsymbol{0 < \delta < 2,\ 0 < \varepsilon < 2/13}$.

$$M = max\left(\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|, \left|\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right|, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|\right), \ \varepsilon = \frac{2-\gamma}{13} \qquad w_{ij} \ge 0, \quad i,j = \overline{0,N}.$$

$$\boldsymbol{w(x, y) \ge w(1, 1) = 0.}$$

Lygčių sistema mažorantei

Matricai $A = \Lambda - C + D$, pažymėję $A_1 = \Lambda - C$, galime užrašyti:

$$(A_1 + D)z = R.$$

Atsižvelgę į pažymėjimus, funkcijai $w(x, y)$ sudarysime lygčių sistemą

$$A_1 w = g$$

Panaudodami žinomą matricą A_1 ir funkciją w, apskaičiuojame vektorių g_{ij}, $i, j = 1, \dots, N - 1$.

Funkcijai w užrašysime skirtumines lygtis analogiškai (4) – (6). Iš (18) $w(x, y) = \frac{Mh^2}{\varepsilon 24}\left(1 - \varepsilon x^2 - \varepsilon y^2 - (1 - 2\varepsilon)x\right)$ diferencijuodami gauname:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{Mh^2}{12},$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0.$$

$$-\delta_x^2 w_{ij} - \delta_y^2 w_{ij} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{Mh^2}{6}.$$

Lygčių sistema mažorantei

Toliau, išvedant nelokaliųjų sąlygų (13) analogą, gauname sistemą:

$$-\delta_x^2 w_{ij} - \delta_y^2 w_{ij} = \frac{Mh^2}{6}, \quad i = \overline{2, N-1}, j = \overline{1, N-1}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{h^2}\left(-\alpha \sum_{i=1}^{N-1} w_{1j} + 2w_{1j} - w_{2j}\right) - \delta_y^2 w_{ij} = \frac{Mh^2}{6} + \frac{\beta g_j}{h^2}, \quad j = \overline{1, N-1}. \tag{20}$$

Čia

$$g_j = w_{0j} - \gamma h\left(\frac{w_{0j} + w_{Nj}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} w_{ij}\right), \quad j = \overline{1, N-1}.$$

$$g_j > \frac{Mh^2}{24}\left(\frac{2-\gamma}{2\varepsilon} - y^2 - \frac{2\gamma}{3} + y^2\gamma\right) \geq \frac{Mh^2}{24}\left(\frac{\delta}{2}\frac{13}{\delta} - 1 - \frac{2\gamma}{3}\right)$$

$$\geq \frac{Mh^2}{24}\frac{25}{6} > \frac{Mh^2}{6} > \frac{Mh^2\gamma}{12}.$$

Lygčių sistema mažorantei

Dabar, kaip ir anksčiau užrašysime šias lygtis matricine forma

$$A_1 w = g$$

Norėdami išreikšti vektorius $\boldsymbol{g = \{g_{ij}\}}$ pastebėsime, kad funkcija $\boldsymbol{w}$, skirtingai nei $\boldsymbol{z = \{z_{ij}\}}$, netenkina homogeninių kraštinių sąlygų, analogiškų (9):

$$z_{Nj} = z_{i0} = z_{iN} = 0, \quad i, j = \overline{0, N}$$

Tai yra priežastis, kodėl nežinomieji su indeksais ***(0, j), (i, 0)*** ir ***(i, N)*** yra lygtyse (19), bet ne (12). Koeficientai prie šių nežinomųjų nėra matricos $\boldsymbol{A_1}$ elementai, todėl papildomi komponentai turi būti pridėti prie vektoriaus $\boldsymbol{g}$ koordinačių išraiškos.

Lygčių sistema mažorantei

Taigi lygčių sistemoje $\boldsymbol{A_1 w = g}$ turime

$$g_{ij} = \begin{cases} \dfrac{Mh^2}{6} + \dfrac{\tilde{w}_{ij}}{h^2}, & i = \overline{2, N-1}, j = \overline{1, N-1}, \\ \dfrac{Mh^2}{6} + \dfrac{\beta g_j(h)}{h^2} + \dfrac{\tilde{w}_{ij}}{h^2}, & i = 1, j = \overline{1, N-1}, \end{cases}$$

kur

$$\tilde{w}_{ij} = \begin{cases} w_{Nj} > 0, & i = N-1, j = \overline{1, N-1}, \\ w_{i0} > 0, & i = \overline{1, N-1}, j = 1, \\ w_{iN} > 0, & i = \overline{1, N-1}, j = N-1, \end{cases}$$

$\tilde{w}_{ij} = 0$, kitais atvejais.

Įvertis paklaidai

Dabar suformuluosime pagrindinį skirtuminio metodo paklaidos įverčiui tyrimo rezultatą, leidžiantį įrodyti metodo konvergavimą.

Teorema (įrodymas pateiktas straipsnyje):

Jei prielaidos ***H1*** ir ***H2*** yra teisingos ir paklaidos tenkina nelygybes $|R_{ij}(h)| \le \frac{h^2}{6} M_4, \quad |R_j(h)| \le \frac{h^2}{12} M_2 \gamma < \frac{h^2}{6} M_2$ (10), tai baigtinių skirtumų metodui (4) – (6) galioja įvertinimas

$$|z_{ij}| \le \frac{C_1 M h^2}{\delta}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{1, N-1} \qquad (21)$$

Čia

$$z_{ij} = u_{ij} - U_{ij}.$$

$\boldsymbol{u_{ij} = u(x_i, y_j)}$ – diferencialinio uždavinio sprendinys,

$\boldsymbol{U_{ij}}$ – skirtuminio uždavinio sprendinys,

$\boldsymbol{C_1}$ – konstanta, nepriklausanti nuo nei nuo ***h***, nei nuo diferencialinio uždavinio sprendinio. $M = \max(M_2, M_4)$.

Įvertis paklaidai ir skirtuminės schemos konvergavimas

Nelygybė (21) išplaukia iš teoremos įrodyme gautų atitinkamų nelygybių

$$|z_{ij}| \le \frac{13Mh^2}{24\delta}, \quad i,j = \overline{1, N-1} \tag{22}$$

$$|z_{0j}| \le \frac{29}{24\delta} Mh^2. \tag{23}$$

Skirtuminės schemos konvergavimas išplaukia iš (21), kai $\boldsymbol{h \to 0}$.

Konvergavimas įrodytas skirtuminei schemai vienos konkrečios nelokaliosios sąlygos atveju. Tačiau metodą galima taikyti ir kitu atveju, kai operatoriaus su nelokalia sąlyga visos tikrinės reikšmės yra tik teigiamos.

Paklaidos įvertis

Keli pastebėjimai:

Nelokalioji integralinė sąlyga (2)

$$u(0,y) = \gamma \int_0^1 u(x,y)dx + \mu_1(y)$$

gali būti interpretuota kaip tam tikras *Dirichlet* kraštinės sąlygos apibendrinimas. Kai $\gamma = 0$, tada $\delta = 2$ ir iš (21) gauname

$$|z_{ij}| \leq \frac{13M_4}{48}h^2, \quad i,j = \overline{1, N-1} \tag{24}$$

Kaip jau buvo pastebėta, kai $\gamma = 0$, paklaida z_{ij} gali būti įvertinta naudojant maksimumo principą:

$$|z_{ij}| \leq \frac{M_4}{12}h^2. \tag{25}$$

Paklaidos įvertis

Abu įvertinimai priklauso nuo h, bet konstanta nelygybėje (24) yra maždaug tris kartus didesnė nei (25). Tai priklauso nuo mažorantės $w(x, y)$. Maksimumo principui mažorantė paprastai apibrėžiama

$$w(x,y) = \frac{h^2 M_4}{24}\left(2 - x^2 - y^2\right).$$

Maksimali šios funkcijos reikšmė yra maždaug tris kartus mažesnė, nei sukonstruotosios šiame darbe

$$w(x,y) = \frac{M}{\varepsilon}\frac{h^2}{24}\left(1 - \varepsilon x^2 - \varepsilon y^2 - (1-2\varepsilon)x\right)$$

Ši mažorantė yra sukonstruota atveju $0 \le \gamma \le 2 - \delta,\ \delta > 0$.

Reikia pastebėti, kad abi mažorantės sutampa, kai $\varepsilon = ½$. Bet mažorantėje (18) imama mažesnė ε reikšmė ($\varepsilon = \delta/13$),kuri garantuoja pranašumą, kai $0 \le \gamma < 2$.

Netgi daugiau, sistemos $Az = R$ matrica A yra M-matrica su reikšmėmis

$$\gamma \in [0, \gamma_0),\ \ \gamma_0 \approx 3.42.$$

Tačiau nėra akivaizdu, kaip apibrėžti mažorantę, kai $\gamma \ge 2$.

Skaitinis eksperimentas

Teorinių tyrimo rezultatų patvirtinimui skirtuminių schemų su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis efektyvumo tyrimui buvo nagrinėtas modelinis uždavinys, kurio tikslus sprendinys yra žinomas.

Gauti teoriniai tyrimo rezultatai nepriklauso nuo netiesinių lygčių sistemos (4) – (6) skaitinio sprendimo metodo.

Ši sistema gali būti sprendžiama naudojant vieną iš iteracinių metodų, pritaikytų uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis.

Darbe buvo naudotas apibendrintas neišreikštinis kintamųjų krypčių metodas *(alternating-direction implicit (ADI) method)* uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis.

Naudotas dvimatis tolygus tinklas srityje $\boldsymbol{D = [0, 1]\times[0, 1]}$.

Pasirinkti tinklai su skirtingais žingsniais $\boldsymbol{h = h_x = h_y}$ ir įvairiomis parametro $\boldsymbol{\gamma}$ nelokaliosiose sąlygose reikšmėmis.

Skaitinis eksperimentas

Skaitiniam eksperimentui pasirinktas paprastas testas paklaidų įverčių patvirtinimui, demonstruojantis baigtinių skirtumo metodo veikimą skirtingoms parametro γ reikšmėms. Nagrinėjame modelinę sistemą (1) – (3)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{4} u(1-u) + g(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

su nelokalia sąlyga

$$u(0,y) = \gamma \int_0^1 u(x,y)dx + \mu_1(y), \quad 0 < y < 1,$$

ir *Dirichlet* kraštinėmis sąlygomis vienetinėje srityje ***D***

$$u(1,y) = \mu_2(y), \quad 0 \le y \le 1,$$
$$u(x,0) = \mu_3(x), \quad u(x,1) = \mu_4, \quad 0 \le x \le 1.$$

Skaitinis eksperimentas

Funkcija ***g(x, y)*** yra parinkta taip, kad funkcija

$$u(x,y) = \left(1 - x^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right)$$

būtų nagrinėjamo uždavinio tikslus sprendinys:

$$g(x,y) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) + \frac{\pi^2}{4}\left(1 - x^2\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}y\right).$$

Kraštinės sąlygos parinktos taip, kad tenkintų tikslų sprendinį ***u(x, y)***. ADI metodo tikslumas buvo vertintas pagal absoliutinės paklaidos maksimumo normą:

$$E_h = \max_{i,j} \left| u(x_i, y_j) - U_{ij} \right|.$$

Taip pat buvo skaičiuojama santykinė paklaidos norma:

$$\epsilon_h = \max_{i,j} \left| \frac{u(x_i, y_j) - U_{ij}}{u(x_i, y_j)} \right|.$$

Skaitinis eksperimentas

Skaitinio eksperimento rezultatai skirtingoms γ ant tolygaus abiem kryptimis tinklo su $N = 100$ intervalais yra pateikiami pirmojoje lentelėje (*Table 1*).

Table 1 The errors for different γ in the case of $h = 0.01$

γ	E_h	ϵ_h
0.0	$1.89729 \cdot 10^{-6}$	$1.26332 \cdot 10^{-5}$
0.3	$2.01499 \cdot 10^{-6}$	$1.49908 \cdot 10^{-5}$
1.0	$5.77622 \cdot 10^{-5}$	$5.03429 \cdot 10^{-5}$
1.95	$2.13652 \cdot 10^{-5}$	$8.20321 \cdot 10^{-5}$
2.0	$2.54840 \cdot 10^{-5}$	$8.00939 \cdot 10^{-5}$
3.0	$1.03093 \cdot 10^{-3}$	$1.78941 \cdot 10^{-3}$
3.2	$4.17644 \cdot 10^{-3}$	$8.49890 \cdot 10^{-3}$
3.22	$4.88902 \cdot 10^{-3}$	$7.93334 \cdot 10^{-3}$
3.224	$8.65916 \cdot 10^{-3}$	$9.80129 \cdot 10^{-2}$

Iš lentelės rezultatų galima matyti, kad sprendinio paklaida pamažu didėja augant γ, kol $0 \leq \gamma < 2$. Tai sutampa su faktu, kad nelokaliųjų sąlygų aproksimacijos paklaida $R_j(h)$ yra tiesiškai priklausoma nuo γ (11).

Skaitinis eksperimentas

Antrojoje lentelėje (*Table 2*) matome, kad teorinė paklaida ***O(h²),*** išplaukianti iš Teoremos, tenkinama visiškai gerai tiek *Dirichlet* sąlygų (***γ = 0***) atveju, tiek ir esant nelokaliajai sąlygai (***γ = 1***).

Table 2 The errors for different stepsizes h and γ

γ	h	E_h	ϵ_h
0.0	0.25	$1.08749 \cdot 10^{-3}$	$2.62507 \cdot 10^{-3}$
	0.125	$2.90550 \cdot 10^{-4}$	$6.83678 \cdot 10^{-4}$
	0.0625	$7.35630 \cdot 10^{-5}$	$1.73016 \cdot 10^{-5}$
	0.03125	$1.85130 \cdot 10^{-5}$	$4.38179 \cdot 10^{-5}$
1.0	0.25	$1.44959 \cdot 10^{-3}$	$3.00694 \cdot 10^{-3}$
	0.125	$3.72072 \cdot 10^{-4}$	$7.81139 \cdot 10^{-4}$
	0.06250	$9.47515 \cdot 10^{-5}$	$1.97871 \cdot 10^{-4}$
	0.03125	$2.38487 \cdot 10^{-5}$	$5.84610 \cdot 10^{-5}$

Pažymėtina, kad testas sėkmingai realizuojamas ir kai ***γ ∈[2; 3.224].*** Kai ***γ > 2***, matrica, atitinkanti skirtuminiam operatoriui su nelokaliosiosiomis sąlygomis (5), turi neigiamą tikrinę reikšmę, ir ADI metodas gali nekonverguoti.