5 Penktoji savaitė. Funkcijos tolydumas

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Funkcijos tolydumo apibrėžimas. Funkcijos tolydumo apibrėžimai pagal Koši ir pagal Heinę.
2. Vienpusis tolydumas. Sudėtinės funkcijos tolydumas.
3. Trūkio taškai ir jų rūšys.
4. Tolydžiųjų funkcijų savybės. Bolcano – Koši ir Vejerštraso teoremos.
5. Monotoninės funkcijos. Atvirkštinė funkcija ir jos savybės.

5.1 Funkcijos tolydumo apibrėžimas. Funkcijos tolydumo apibrėžimai pagal Koši ir pagal Heinę.

5.1 Apibrėžimas. Funkcija $f(x)$ vadinama tolydžiąja taške $x = x_0$, jei:

- funkcija $f(x)$ apibrėžta srityje X, o x_0 yra tos srities taškas,
- funkcija turi ribą, kai $x \to x_0$,
- kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja $\delta > 0$ toks, kad

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon, \text{kai } | x - x_0 | < \delta,$$

t. y. funkcijos riba, kai $x \to x_0$, lygi funkcijos reikšmei taške x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Priešingu atveju, sakome, kad funkcija $f(x)$ taške $x = x_0$ turi trūkį.

5.2 Apibrėžimas. *Funkcijos tolydumo apibrėžimas pagal Koši.* Funkcija $f(x)$ yra tolydi taške $x = x_0$, jei kiekvienam skaičiui $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon,$$

su visais $x \neq x_0$, tenkinančiais nelygybę $| x - x_0 | < \delta$. Tuomet rašome, kad

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

5.3 Apibrėžimas. *Funkcijos tolydumo apibrėžimas pagal Heinę.* Funkcija $f(x)$ yra tolydi taške $x = x_0$, jei kiekvienai argumento reikšmių, nelygių x_0, sekai $\{x_n\}$ konverguojant į x_0 atitinkama funkcijos reikšmių seka $\{f(x_n)\}$ konverguoja į $f(x_0)$. Tuomet rašome, kad

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

5.2 Vienpusis tolydumas. Sudėtinės funkcijos tolydumas.

5.4 Apibrėžimas. Funkcija $f(x)$ yra tolydi taške $x = x_0$ iš dešinės (iš kairės), jei kiekvienam skaičiui $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon,$$

kai $x_0 < x < x_0 + \delta \quad (x_0 - \delta < x < x_0)$. Rašome

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad (f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)).$$

Funkcija yra tolydi intervale, jei ji tolydi kiekviename to intervalo taške.

5.1 Teorema. *Funkcija $f(x)$ tolydi taške $x = x_0$ tada ir tik tada, jei ji šiame taške tolydi ir iš kairės, ir iš dešinės.*

5.2 Teorema. *Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra tolydi taške $x = x_0$, o funkcija $z = \phi(y)$ – tolydi taške $y = f(x_0)$. Tuomet sudėtinė funkcija $z = \phi(f(x))$ yra tolydi taške $x = x_0$.*

5.3 Trūkio taškai ir jų rūšys.

Kaip pamename, funkcija $f(x)$ yra tolydi taške x_0 iš dešinės (iš kairės), jei galioja ribinė priklausomybė:

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \quad \Big(f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)\Big).$$

Jei viena ar kita iš šių priklausomybių negalioja, tai funkcija $f(x)$ taške x_0 turi trūkį iš dešinės (iš kairės).

Tarkime, kad x_0 yra funkcijos $f(x)$ trūkio taškas. Šiame taške funkcija gali būti tiek apibrėžta, tiek neapibrėžta.

5.5 Apibrėžimas. Jei vienpusės funkcijos $f(x)$ ribos taške x_0 yra baigtinės, tai trūkio taškas vadinamas pirmosios rūšies trūkio tašku. Pirmosios rūšies trūkiai skirstomi į pašalinamus ir nepašalinamus:

- trūkis vadinamas nepašalinamu, jei

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

- trūkis vadinamas pašalinamu, jei

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0).$$

5.6 Apibrėžimas. Jei bent viena vienpusė funkcijos $f(x)$ riba taške x_0 neegzistuoja arba lygi ∞, tai trūkio taškas vadinamas antrosios rūšies trūkio tašku.

5.4 Tolydžiųjų funkcijų savybės. Bolcano – Koši ir Vejerštraso teoremos.

5.3 Teorema. *Jei funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra tolydžios jų apibrėžimo srities taške x_0, tai taške x_0 yra tolydžios ir funkcijos*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0).$$

5.4 Teorema. ***Pirmoji Bolcano- Koši teorema.***
Jei funkcija $f(x)$ yra apibrėžta ir tolydi intervale $[a,b]$, o šio intervalo galuose įgyja priešingų ženklų reikšmes, tai tuomet tarp a ir b būtinai yra toks taškas c, kuriame funkcija lygi nuliui, t. y. $f(c) = 0(a < c < b)$.

5.5 Teorema. ***Antroji Bolcano- Koši teorema.***
Jei funkcija $f(x)$ yra apibrėžta ir tolydi intervale $[a,b]$, o šio intervalo galuose įgyja nelygias reikšmes $f(a) = A$, o $f(b) = B$, tai bet kuriam skaičiui $C: \quad A < C < B \quad (B < C < A)$ atsiras toks taškas c,esantis tarp a ir b, kad $f(c) = C$.

5.6 Teorema. ***Pirmoji Vejerštraso teorema.***
Jei funkcija $f(x)$ yra apibrėžta ir tolydi intervale $[a,b]$, tai ji aprėžta ir iš apačios, ir iš viršaus, t. y. egzistuoja tokie baigtiniai skaičiai m ir M, kad $m \leq f(x) \leq M$, kai $a \leq x \leq b$.

5.7 Teorema. ***Antroji Vejerštraso teorema.***
Jei funkcija $f(x)$ yra apibrėžta ir tolydi intervale $[a,b]$, tai tame intervale galima rasti tokius taškus x_0 ir x_1, kad reikšmės $f(x_0)$ ir $f(x_1)$ yra atitinkamai didžiausioji ir mažiausioji iš visų funkcijos reikšmių $f(x)$, kai $x \in [a,b]$.

5.5 Monotoninės funkcijos. Atvirkštinė funkcija ir jos savybės.

5.7 Apibrėžimas. Jei bet kuriems $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ funkcija $f(x)$ tenkina kurią nors iš nelygybių $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$, tai ji yra vadinama monotonine funkcija. Atitinkamai nemažėjančia, nedidėjančia, didėjančia, mažėjančia. Monotoniškai didėjančios ir monotoniškai mažėjančios funkcijos dar vadinamos griežtai monotoninėmis funkcijomis.

5.8 Teorema. *Monotoninės funkcijos turi tik pirmosios rūšies trūkius.*

5.9 Teorema. *Jei aibėje X monotoniškai didėjanti (mažėjanti) funkcija įgyja reikšmes aibėje Y ir ją visą užpildo, tai funkcija yra tolydi aibėje X.*

Kalbant apie atvirkštinės funkcijos egzistavimą apsiribojama tik griežtai monotoninėmis funkcijomis.

5.8 Apibrėžimas. Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra apibrėžta ir griežtai monotoninė segmente $[a,b]$, o jos reikšmių aibė yra $[c,d]$. Jeigu kiekvienam aibės $[c,d]$ taškui y_0 galime surasti vienintelį $x_0 \in [a,b]$, tai sakome, kad aibėje $[c,d]$ yra apibrėžta funkcijos $y = f(x)$ atvirkštinė funkcija $x = f^{-1}(y)$, įgyjanti reikšmes aibėje $[a,b]$.

5.10 Teorema. ***Teorema apie atvirkštinę funkciją.***
Jei funkcija $f(x)$:

1. *tolydi ir apibrėžta aibėje* $[a, b]$,

2. *monotoniškai didėja arba mažėja aibėje* $[a, b]$,

3. $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$,

tai tuomet intervale $[\alpha, \beta]$ *(arba* $[\beta, \alpha]$*) galima apibrėžti atvirkštinę funkciją* $x = f^{-1}(y)$, *kuri yra tolydi ir monotoniškai didėja arba mažėja intervale* $[\alpha, \beta]$ *(arba* $[\beta, \alpha]$*).*

5.11 Teorema. *Jei funkcija* $y = f(x)$ *yra apibrėžta ir griežtai monotoninė aibėje* (a, b), *o* $A = inf f(x), B = sup f(x)$, *kai* $x \in (a, b)$, *tai tuomet funkcijos reikšmės užpildo intervalą* (A, B) *ir jame galima apibrėžti funkcijos* $f(x)$ *atvirkštinę funkciją* $x = f^{-1}(y)$, *kuri yra tolydi ir griežtai monotoninė aibėje* (A, B) $((B, A))$.