4 Ketvirtoji savaitė. Funkcijos riba

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Funkcijos ribos apibrėžimai pagal Koši ir pagal Heinę. Vienpusės ribos.

2. Sudėtinė funkcija ir jos riba.

3. Nykstančios ir neaprėžtai didėjančios funkcijos. Nykstančių funkcijų palyginimas.

4. Svarbios funkcijų ribų teoremos.

4.1 Funkcijos ribos apibrėžimai pagal Koši ir pagal Heinę. Vienpusės ribos

4.1 Apibrėžimas. *Funkcijos ribos apibrėžimas pagal Koši.* Funkcija $f(x)$ turi ribą, lygią b, kai jos argumentas x artėja prie a, jei kiekvienam skaičiui $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad

$$| f(x) - b | < \varepsilon,$$

su visais $x \neq a$, tenkinančiais nelygybę $| x - a | < \delta$. Tuomet rašome, kad

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

4.2 Apibrėžimas. *Funkcijos ribos apibrėžimas pagal Heinę.* Funkcija $f(x)$ turi ribą, lygią b, kai jos argumentas x artėja prie a, jei kiekvienai argumento reikšmių, nelygių a, sekai $\{x_n\}$ konverguojant į a atitinkama funkcijos reikšmių seka $\{f(x_n)\}$ konverguoja į b. Tuomet rašome, kad

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

4.3 Apibrėžimas. Funkcija $f(x)$ turi ribą, lygią b, kai jos argumentas x artėja prie ∞, jei kiekvienam skaičiui $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad

$$| f(x) - b | < \varepsilon,$$

su visais x, tenkinančiais nelygybę $| x | > \delta$. Rašome

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c.$$

4.4 Apibrėžimas. Funkcija $f(x)$ turi ribą, lygią b, iš dešinės (iš kairės), kai jos argumentas x artėja prie a, jei kiekvienam skaičiui $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad

$$| f(x) - b | < \varepsilon,$$

kai $a < x < a + \delta \quad (a - \delta < x < a)$. Rašome

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \quad (\lim_{x \to a-0} f(x) = b).$$

4.2 Sudėtinė funkcija ir jos riba.

4.5 Apibrėžimas. Tarkime, kad funkcija $z = \phi(y)$ apibrėžta aibėje Y, o funkcija $y = f(x)$ – aibėje X. Tuomet funkcija $z = \phi(f(x))$ yra argumento x funkcija ir vadinama sudėtine funkcija.

4.1 Teorema. *Teorema apie sudėtinės funkcijos ribą Jei*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

ir egzistuoja

$$\lim_{y \to A} \phi(y),$$

bei tokia taško a ε – aplinka, kurioje $f(x) \neq A$, tai tuomet

$$\lim_{x \to a} \phi(f(x)) = \lim_{y \to A} \phi(y).$$

4.3 Nykstančios ir neaprėžtai didėjančios funkcijos. Nykstančių funkcijų palyginimas.

4.6 Apibrėžimas. Funkcija $\alpha(x)$ vadinama nykstančia, kai x artėja prie a, jei kiekvienam skaičiui $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad

$$| \alpha(x) | < \varepsilon, \text{kai} 0 < | x - a | < \delta.$$

Rašome

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

4.7 Apibrėžimas. Funkcija $f(x)$ vadinama neaprėžtai didėjančia, kai x artėja prie a, jei kiekvienam skaičiui $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius $\delta > 0$, kad

$$| f(x) | > E, \text{kai} 0 < | x - a | < \delta.$$

Rašome

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Tegul turime dvi nykstamai mažėjančias funkcijas $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$, kai x artėja prie a.

4.8 Apibrėžimas. Jei santykio

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \quad \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)$$

riba yra baigtinė ir nelygi nuliui, tai funkcijos $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ yra vadinamos vienos eilės nykstančiomis funkcijomis, kai x artėja prie a.

4.9 Apibrėžimas. Jei santykio

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$$

riba yra lygi nuliui (santykio

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

riba lygi begalybei), kai x artėja prie a, tai funkcija $\beta(x)$ yra vadinama aukštenės eilės nykstančia funkcija negu $\alpha(x)$, kai x artėja prie a. Rašome, kad

$$\beta(x) = \mathcal{O}(\alpha(x)).$$

4.10 Apibrėžimas. Funkcija $\beta(x)$ vadinama k – tosios eilės nykstančia funkcija lyginant su $\alpha(x)$, kai x artėja prie a, jei funkcijos $\beta(x)$ ir $(\alpha(x))^k$ yra vienos eilės nykstančios funkcijos, kai x artėja prie a.

4.11 Apibrėžimas. Jei santykio

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$$

riba yra lygi 1, kai x artėja prie a, t. y.

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1,$$

tai funkcijas $\alpha(x)$ ir $\beta(x)$ vadiname ekvivalenčiomis funkcijomis, kai x artėja prie a. Rašome

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

4.4 Svarbios funkcijų ribų teoremos

4.2 Teorema. *Funkcija $f(x)$ turi ribą c, kai jos argumentas x artėja prie a tada ir tik tada, kai jos ribos iš kairės ir iš dešinės x artėjant prie a yra lygios.*

4.3 Teorema. *Tegul turime dvi funkcijas $f(x)$ ir $g(x)$, kurios turi baigtines ribas, kai x artėja prie a, t. y.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B.$$

Tada funkcijos

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

taip pat turi baigtines ribas (imant dalmenį, $B \neq 0$), būtent $A + B$, $A \cdot B$, $\frac{A}{B}$, t. y.

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B, \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

4.12 Apibrėžimas. Sakome, kad $f(x) \leqslant g(x)$ taške $x = a$, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ taško a ε – aplinkos taškai tenkina nelygybę: $f(x) \leqslant g(x)$.

4.4 Teorema. *Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$, kai $x \to a$ turi baigtines ribas, t. y.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \lim_{x \to a} g(x) = B, A, B \in R.$$

Tuomet:

1. *jei $A < B$, tai $f(x) < g(x)$ taške $x = a$,*
2. *jei $f(x) \leqslant g(x)$, tai ir $A \leqslant B$,*
3. *jei $A = B$, o $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ taške $x = a$,tai egzituoja ir funkcijos $h(x)$ riba, kuri taip pat lygi A.*

4.5 Teorema. *Jei funkcija $\alpha(x)$ nyksta, kai x artėja prie a, tai funkcija*

$$f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

neaprėžtai didėja, kai x artėja prie a.

4.6 Teorema. *Tarkime, kad funkcijos $\beta(x), \alpha(x), \beta'(x), \alpha'(x)$ nyksta, kai x artėja prie a, o $\beta(x) \sim \beta'(x), \alpha(x) \sim \alpha'(x)$. Tuomet:*

$$1) \lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\beta'(x)}{\alpha'(x)},$$
$$2) \lim_{x\to a} \beta(x)\cdot\alpha(x) = \lim_{x\to a} \beta'(x)\cdot\alpha'(x).$$

Pagrindinės funkcijų ribos:

$$1. \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
$$2. \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$
$$3. \lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Trečiąją ribą taikysime ir skaičiuodami ribas

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}, \quad \text{kai} \quad \lim_{x\to a} f(x) = 1, \quad o \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Kai $\alpha(x)$ artėja prie nulio, o $x \to a$ teisingi šie tvirtinimai:

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$,

2) $1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}$,

3) $\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$,

4) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$,

5) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$,

6) $tg \quad \alpha(x) \sim \alpha(x)$,

7) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$,

8) $arctg \quad \alpha(x) \sim \alpha(x)$,

9) $(1+\alpha(x))^p - 1 \sim p\cdot\alpha(x)$,

10) $tg\alpha(x) - \sin\alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^3}{2}$.