14 Keturioliktoji savaitė. DAUGELIO KINTAMŲJŲ FUNKCIJOS SĄLYGINIAI EKSTREMUMAI. JŲ RADIMO ALGORITMAI.

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Daugelio kintamųjų funkcijos sąlyginiai ekstremumai. Jų radimas išsprendžiant ryšio lygtis.

2. Sąlyginių ekstremumų radimas Lagranžo metodu.

14.1 Daugelio kintamųjų funkcijos sąlyginiai ekstremumai. Jų radimas išsprendžiant ryšio lygtis.

Nagrinėkime $n+m$ kintamųjų funkciją $u = f(x_1, ..., x_{n+m})$, kurios kintamuosius sieja m ryšio lygčių

$$\Phi_1(x_1, ..., x_{n+m}) = 0, \quad ..., \quad \Phi_m(x_1, ..., x_{n+m}) = 0.$$

14.1 Apibrėžimas. Taškas $M_0(x_1^0, ..., x_{n+m}^0)$, kuriame galioja visos ryšio lygtys, vadinamas funkcijos $u = f(x_1, ..., x_{n+m})$ sąlyginiu maksimumu (sąlyginiu minimumu), jei visuose taško M_0 aplinkos taškuose galioja nelygybė $f(x_1, ..., x_{n+m}) < f(x_1^0, ..., x_{n+m}^0)$ $(f(x_1, ..., x_{n+m}) > f(x_1^0, ..., x_{n+m}^0))$.

Tarkime, kad taško $M_0(x_1^0, ..., x_{n+m}^0)$ aplinkoje tiek funkcija $u = f(x_1, ..., x_{n+m})$, tiek funkcijos $\Phi_i(x_1, ..., x_{n+m})$, $i = 1, ..., m$ yra diferencijuojamos ir turi tolydžiąsias dalines išvestines visų kintamųjų atžvilgiu. Sudarome matricą

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \dots & \cdots & \dots & \dots\dots & \cdots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}.$$

Tarkime, kad nagrinėjamame taške nors vienas m – osios eilės determinantas nelygus nuliui, t. y. šios matricos rangas lygus m. Nagrinėkime nelygų nuliui determinantą

$$\frac{D(\Phi_1, ..., \Phi_m)}{D(x_{n+1}, ..., x_{n+m})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \dots\dots & \cdots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{vmatrix}.$$

Tada ryšio lygtis galima perrašyti taip:

$$x_{n+1} = \phi_1(x_1, ..., x_n), \quad ..., \quad x_m = \phi_m(x_1, ..., x_n),$$

o uždavinys apie $n+m$ kintamųjų funkcijos $u = f(x_1, ..., x_{n+m})$ sąlyginį ekstremumą pakeičiamas jam ekvivalenčiu sudėtinės n kintamųjų funkcijos

$$f(x_1, .., x_n, \phi_1(x_1, ..., x_n), ..., \phi_m(x_1, ..., x_n))$$

ekstremumo radimo uždaviniu.

Kitaip tariant šiuo būdu sąlyginio ekstremumo nustatymo uždavinys yra keičiamas daugelio kintamųjų funkcijos paprasto ekstremumo nustatymo uždaviniu. Toks ekvivalentus pakeitimas galimas tik tokiais atvejais, kai ryšio lygtyse galime išreikštiniu būdu parašyti m kintamųjų.

14.2 Sąlyginių ekstremumų radimas Lagranžo metodu.

Aptarsime bene dažniausiai sąlyginių ekstremumų nustatymui naudojamą neapibrėžtųjų Lagranžo daugiklių metodą. Tarę, kad

$$x_{n+1} = \phi_1(x_1, ..., x_n), \quad ..., \quad x_m = \phi_m(x_1, ..., x_n),$$

diferencijuojame ryšio lygtis ir užrašome diferencialus

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} dx_j = 0,$$
$$...,$$
$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Jei funkcija $u = f(x_1, ..., x_{n+m})$ taške M_0 įgyja sąlyginį ekstremumą, tai jos diferencialas tame taške yra lygus nuliui, t. y.

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Šią lygtį sudedame su ryšio lygčių diferencialais padaugintais iš neapibrėžtųjų daugiklių λ_i. Gauname lygybę:

$$\sum_{j=1}^{n+m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + ... + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} \right) dx_j = 0.$$

Neapibrėžtuosius daugiklius parinkime taip, kad nariai esantys prie priklausomųjų diferencialų dx_{n+1}, ..., dx_{n+m} būtų lygūs nuliui, t. y.

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+1}} + ... + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+1}} = 0,$$
$$...,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} + ... + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} = 0.$$

Tada

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + ... + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j} \right) dx_j = 0$$

arba

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} = 0,$$

$$...,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} + ... + \lambda_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} = 0.$$

Tokiu būdu turime sistemą sudarytą iš $n+m$ lyčių ir m ryšio lygčių, t. y. galime nustatyti tiek neapibrėžtuosius daugiklius λ_i, tiek sąlyginių ekstremumų taškus $x_1, x_2, ..., x_{n+m}$.

Paprastai ieškant sąlyginių ekstremumų Lagranžo metodu yra sudaroma pagalbinė funkcija

$$F(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m) + \lambda_1 \Phi_1(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m) + ...$$
$$+ \lambda_m \Phi_m(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m)$$

ir ieškoma šios funkcijos ekstremumų, t. y. sudaroma ir sprendžiama lygčių sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_{n+m}} = 0. \end{cases}$$

Kaip matome, gavome būtinąsias ekstremumo egzistavimo sąlygas. Kalbėdami apie pakankamasias sąlygas, turime daryti prielaidą, kad tiek funkcija $f(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m)$, tiek funkcijos $\Phi_i(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m)$, $i = 1, ..., m$ taško M_0 aplinkoje turi tolydžiąsias antrosios eilės dalines išvestines. Todėl esant patenkintoms minėtoms sąlygoms, stacionariųjų taškų tyrimui sudaroma kvadratinė forma, aptarta ankstesnėje paskaitoje. Sprendimai apie ekstremumų pobūdį priimami analogiškai.