# 12 Dvyliktoji savaitė. AUKŠTESNIŲJŲ EILIŲ IŠVESTINĖS IR DIFERENCIALAI. KRYPTINĖS IŠVESTINĖS. GRADIENTAS. NEIŠREIKŠTINĖS FUNKCIJOS DIFERENCIJAVIMAS

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Dviejų ir trijų kintamųjų funkcijų aukštesniųjų eilių išvestinės ir diferencialai.

2. Kryptinė išvestinė. Gradientas.

3. Daugelio kintamųjų funkcijos Teiloro formulė.

4. Neišreikštinės funkcijos diferencijavimas.

## 12.1 Dviejų ir trijų kintamųjų funkcijų aukštesniųjų eilių išvestinės ir diferencialai.

Jei daugelio kintamųjų funkcija tam tikroje aibėje $D$ turi dalines išvestines tam tikrų kintamųjų atžvilgiu, tai tuomet minėtosios dalinės išvestinės taip pat yra daugelio kintamųjų funkcijos. Jei gautosios funkcijos yra diferencijuojamos, tai galime kalbėti apie jų dalines išvestines tam tikrų kintamųjų atžvilgiu.

Panagrinėkime trijų kintamųjų funkciją $u = f(x, y, z)$. Jei ji turi dalines išvestines kintamųjų $x$, $y$ ir $z$ atžvilgiu, tai tuomet $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ taip pat yra kintamųjų $x$, $y$ ir $z$ funkcijos. Jei gautosios funkcijos yra diferencijuojamos kintamųjų $x$, $y$ ir $z$ atžvilgiu, tai tuomet jų dalinės išvestinės vadinamos antrosios eilės dalinėmis išvestinėmis. Trijų kintamųjų funkcijai galime apskaičiuoti tokias antrosios eilės dalines išvestines:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}.$$

Analogiškai galima apibrėžti ir trečiosios, ketvirtosios,..., $n$ –tosios eilės dalines išvestines.

**12.1 Apibrėžimas.** Aukštesniųjų eilių dalinės išvestinės, apskaičiuotos skirtingų kintamųjų atžvilgiu, vadinamos mišriosiomis.

Trijų kintamųjų funkcijos atveju, antrosios eilės mišriosios dalinės išvestinės yra tokios:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}.$$

Dviejų kintamųjų funkcijos $u = f(x, y)$ antrosios eilės dalinės išvestinės yra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

o iš jų mišriosios –
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$
Suformuluosime teoremą, nustatančią sąlygas, kada dviejų kintamųjų funkcijos mišriosios išvestinės yra lygios.

**12.1 Teorema.** *Jei funkcija $u = f(x, y)$ yra apibrėžta aibėje $D$ ir šioje aibėje yra du kartus diferencijuojama taške $(x_0, y_0)$, o jos antrosios eilės mišriosios išvestinės $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ yra tolydžios taške $(x_0, y_0)$, tai tame taške mišriosios išvestinės yra lygios, t. y.*
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Bendresnė teorema:

**12.2 Teorema.** *Jei funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra apibrėžta aibėje $D$ ir šioje aibėje turi visas galimas dalines išvestines iki $(k-1)$ – osios eilės imtinai, o $k$ – osios eilės mišriosios išvestinės yra tolydžios aibėje $D$, tai tada $k$ – osios eilės mišriųjų išvestinių reikšmės nepriklauso nuo diferencijavimo tvarkos.*

Kaip jau žinome, tuo atveju, kai $n$ kintamųjų funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ aibėje $D$ turi tolydžiąsias pirmosios eilės dalines išvestines, jos diferencialas išreiškiamas taip:
$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$
Suprantama, kad šis diferencialas yra kintamųjų $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ funkcija. Jei egzistuoja funkcijos $u$ antrosios eilės dalinės išvestinės, tai galima kalbėti apie antrosios eilės diferencialą, kuris apibrėžiamas kaip pirmosios eilės diferencialo diferencialas, t. y.
$$d^2u = d(du).$$
Jei $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ – nepriklausomieji kintamieji, kurių pokyčiai išlieka pastovūs, t. y. $dx_1$, $dx_2$, ..., $dx_n$ – konstantos, tai tuomet vadovaujantis diferencijavimo taisyklėmis
$$d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_2 + ... d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) dx_n$$
arba
$$d^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n\right) dx_1 + ... +$$
$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} dx_n\right) dx_n.$$
Suprastinę gauname
$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1^2 + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} dx_n^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + ... + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n.$$

Antrosios eilės diferencialo diferencialas yra trečiosios eilės diferencialas ir t. t. Todėl $k$ – osios eilės diferencialas

$$d^k u = d(d^{k-1}u).$$

Siekiant supaprastinti ilgus reiškinius, diferencialai formaliai užrašomi taip:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)u,$$

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 u, ...,$$

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k u$$

## 12.2 Kryptinė išvestinė. Gradientas.

Nagrinėkime trijų kintamųjų funkciją $u = f(x, y, z)$. Šios funkcijos dalinės išvestinės $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ir $\frac{\partial u}{\partial z}$ parodo funkcijos kitimo greitį koordinatinių ašių kryptimis. Nagrinėjant fizikinius procesus svarbus funkcijos kitimo greitis bet kuria kita kryptimi.

Tarkime, kad turime funkciją, kuri yra apibrėžta tam tikroje aibėje. Nagrinėkime šios aibės tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Pasirinkime vienetinio ilgio vektorių $\overrightarrow{a}$, kuris su koordinačių ašimis $Ox$, $Oy$ ir $Oz$ sudaro atitinkamus kampus $\alpha$, $\beta$ ir $\gamma$. Todėl vektoriaus $\overrightarrow{a}$ koordinatės yra $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Per tašką $M_0$ nubrėžkime tiesę kolinearią vektoriui $\overrightarrow{a}$ ir joje pažymėkime tašką $M(x, y, z)$. Pažymėkime skaičių $l$ kaip orientuotos atkarpos $M_0M$ ilgį su $+$ ženklu, kai atkarpos $M_0M$ kryptis sutampa su vektoriaus $\overrightarrow{a}$ kryptimi ir su $-$ ženklu, kai atkarpos $M_0M$ kryptis yra priešinga vektoriaus $\overrightarrow{a}$ krypčiai. Tuomet taško $M$ koordinatės yra

$$x = x_0 + l\cos\alpha, \quad y = y_0 + l\cos\beta, \quad z = z_0 + l\cos\gamma,$$

o funkcija $u$ tampa vieno kintamojo $l$ sudėtine funkcija.

**12.2 Apibrėžimas.** Jei egzistuoja sudėtinės funkcijos $u = f(x_0 + l\cos\alpha, y_0 + l\cos\beta, z_0 + l\cos\gamma)$ išvestinė $l$ atžvilgiu taške $l = 0$, tai ši išvestinė vadinama funkcijos $u = f(x, y, z)$ kryptine išvestine ir žymima $\frac{\partial u}{\partial l}$. Be to pagal sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklę

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dl}.$$

Kadangi $\frac{dx}{dl} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dl} = \cos\beta$, $\frac{dz}{dl} = \cos\gamma$, tai

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

**12.3 Apibrėžimas.** Vektorius, kurio koordinatės yra

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}_{M_0},$$

vadinamas funkcijos $u$ gradientu ir žymimas $\overrightarrow{g}$.

Pabandykime atsakyti į klausimą, kuria kryptimi sparčiausiai kinta nagrinėjama funkcija, t. y. kuria kryptimi jos kitimo greitis yra didžiausias. Tarkime, kad visos funkcijos dalinės išvestinės vienu metu nėra lygios nuliui.

Kryptinę išvestinę perrašome kaip dviejų vektorių skaliarinę sandaugą, t. y.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{a}.$$

Remdamiesi vektorių skaliarinės sandaugos apibrėžimu, turime, kad

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\overrightarrow{g}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\phi,$$

čia $\phi$ – kampas, kurį sudaro vektoriai $\overrightarrow{g}$ ir $\overrightarrow{a}$. Kadangi $|\overrightarrow{a}| = 1$, tai $\dfrac{\partial u}{\partial l} = |\overrightarrow{g}| \cdot \cos\phi$. Bet didžiausią reikšmę kryptinė išvestinė įgyja tuomet, kai $\cos\phi = 1$, t. y. kai vektorių $\overrightarrow{g}$ ir $\overrightarrow{a}$ kryptys sutampa. Vadinasi funkcijos $u$ sparčiausio augimo kryptis sutampa su gradiento kryptimi, o didžiausias kitimo greitis lygus gradiento ilgiui.

Įrodėme tokią teoremą:

**12.3 Teorema.** *Funkcijos $u = f(x, y, z)$ gradientas taške $M_0(x_0, y_0, z_0)$ rodo didžiausio funkcijos kitimo kryptį ir dydį tame taške.*

## 12.3 Daugelio kintamųjų funkcijos Teiloro formulė.

Nagrinėkime dviejų kintamųjų funkciją $u = f(x, y)$, diferencijuojamą $n + 1$ kartą taško $M_0(x_0, y_0)$ aplinkoje. Šioje aplinkoje pasirinkime tašką $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ir taškus $M$ bei $M_0$ sujunkime tiese. Tos tiesės parametrinės lygtys bus:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x, \\ y = y_0 + t\Delta y, \quad 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Tuomet tiesėje nagrinėjama dviejų kintamųjų funkcija $u = f(x, y)$ tampa sudėtine vieno kintamojo $t$ funkcija

$$u = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Pažymėkime

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Šios funkcijos pokytis taške $M_0$ yra

$$\Delta F(t) = \Delta u_{M_0} = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0).$$

Vieno kintamojo funkciją galime parašyti pagal Teiloro formulę taip:

$$F(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!}(t - t_0) + ... \frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Kadangi $t$ – nepriklausomasis kintamasis, tai $t - t_0 = dt$, o tada $F^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k = d^k F(t_0) = d^k u_{t_0}$. Perrašome funkcijos $F(t)$ skleidinį Teiloro eilute taip:

$$F(t) - F(t_0) = du_{t_0} + \frac{d^2 u_{t_0}}{2!} + ... + \frac{d^n u_{t_0}}{n!} + \frac{d^{n+1} u_{t_0 + \theta(t - t_0)}}{(n+1)!}.$$

Kadangi $t_0 = 0$, tai

$$d^k u_{t_0} = d^k u_{M_0}, \quad \text{o} \quad F(t) - F(t_0) = \Delta u.$$

Todėl iš skleidinio Teiloro eilute, gauname

$$\Delta u = du_{M_0} + \frac{d^2 u_{M_0}}{2!} + ... + \frac{d^n u_{M_0}}{n!} + \frac{d^{n+1} u(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!}.$$

Grįžkime prie funkcijos $f(x, y)$:

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x_0, y_0) + ...+$$

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),$$

čia $0 < \theta < 1$.

Kadangi $dt = t - t_0 = 1 - 0 = 1$, o $dx = \Delta x dt$, tai $dx = x - x_0$. Atitinkamai $dy = y - y_0$ ir funkcijos $f(x, y)$ skleidinys Teiloro eilute

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right) f(x_0, y_0)+$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^2 f(x_0, y_0)+...+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^n f(x_0, y_0)+R_{n+1}.$$

### 12.4 Neišreikštinės funkcijos diferencijavimas.

Pradžioje apsiribosime dviejų kintamųjų neišreikštinės funkcijos apibrėžimu ir analize. Vėliau rezultatus apibendrinsime daugelio kintamųjų funkcijoms.

**12.4 Apibrėžimas.** Jei dviejų kintamųjų $x$ ir $y$ priklausomybė nustatoma lygtimi

$$F(x, y) = 0,$$

čia $F(x, y)$ – funkcija, apibrėžta tam tikroje aibėje, tai sakome, kad vieno kintamojo funkcija duota neišreikštiniu būdu. Kitaip sakant, funkcija $F(x, y)$ – neišreikštinė funkcija.

**12.4 Teorema.** ***Neišreikštinės funkcijos egzistavimo teorema.***
*Jei funkcija $F(x, y)$ yra apibrėžta ir tolydi stačiakampėje srityje $D = \{(x, y)| x_0 - h \leq x \leq x_0 + h, y_0 - h \leq y \leq y_0 + h\}$, $F(x_0, y_0) = 0$, o esant pastoviam $x$ funkcija $F(x, y)$ monotoniškai didėja (mažėja) didėjant $y$, tai tada tam tikroje taško $(x_0, y_0)$ aplinkoje funkcija $F(x, y) = 0$ $y$ nustato kaip vienareikšmę argumento $x$ funkciją $y = f(x)$, kuri yra tolydi, o $f(x_0) = y_0$.*

Truputį papildę teoremos sąlygas, suformuluosime kitą teoremą, kuri nustato ne tik neišreikštinės funkcijos egzistavimo, bet ir jos diferencijavimo sąlygas.

**12.5 Teorema.** ***Neišreikštinės funkcijos egzistavimo ir diferencijuojamumo teorema.***
*Jei funkcija $F(x, y)$ yra apibrėžta ir tolydi stačiakampėje srityje $D = \{(x, y)| x_0 - h \leq x \leq x_0 + h, y_0 - h \leq y \leq y_0 + h\}$, $F(x_0, y_0) = 0$, srityje $D$ turi tolydžiąsias dalines*

*išvestines* $F'_x$, $F'_y$, *o* $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, *tai tada tam tikroje taško* $(x_0, y_0)$ *aplinkoje funkcija* $F(x, y) = 0$ $y$ *nustato kaip vienareikšmę argumento* $x$ *funkciją* $y = f(x)$, *kuri yra tolydi ir turi tolydžiąją išvestinę*

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y},$$

*o* $f(x_0) = y_0$.

Dabar pateiksime šios teoremos apibendrinimą daugelio kintamųjų funkcijoms.

**12.6 Teorema.** *Jei funkcija* $F(x_1, ..., x_n, y)$ *yra apibrėžta ir tolydi stačiakampyje gretasienyje* $D = \{(x_1, ..., x_n, y) | x_1^0 - h_1 \leq x_1 \leq x_1^0 + h_1, ..., x_n^0 - h_n \leq x_n \leq x_n^0 + h_n, y_0 - h \leq y \leq y_0 + h\}$, $F(x_1^0, .., x_n^0, y_0) = 0$, *srityje* $D$ *turi tolydžiąsias dalines išvestines* $F'_{x_1}$, ..., $F'_{x_n}$, $F'_y$, *o* $F'_y(x_1^0, ..., x_n^0, y_0) \neq 0$, *tai tada tam tikroje taško* $(x_1^0, ..., x_n^0, y_0)$ *aplinkoje funkcija* $F(x_1, ..., x_n, y) = 0$ $y$ *nustato kaip vienareikšmę argumentų* $x_1$, ..., $x_n$ *funkciją* $y = f(x_1, ..., x_n)$, *kuri yra tolydi ir turi tolydžiąsias išvestines*

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

*o* $f(x_1^0, ..., x_n^0) = y_0$.