11 Vienuoliktoji savaitė. TOLYDŽIOSIOS KELIŲ KINTAMŲJŲ FUNKCIJOS. JŲ SAVYBĖS. DALINĖS IŠVESTINĖS IR DIFERENCIALAI

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Kelių kintamųjų funkcijos tolydumas. Sudėtinės funkcijos tolydumas.
2. Kelių kintamųjų funkcijos pilnasis pokytis ir diferencijuojamumas. Diferencijuojamumo ir tolydumo ryšys.
3. Sudėtinės funkcijos diferencijavimas.
4. Kelių kintamųjų funkcijos diferencialas ir jo formos invariantiškumas.

11.1 Kelių kintamųjų funkcijos tolydumas. Sudėtinės funkcijos tolydumas.

Tarkime, kad funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n$ yra apibrėžta aibėje $D \subset R^n$, o $M'(x_1', x_2', ..., x_n') \in D$.

11.1 Apibrėžimas. Funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n$ vadinama tolydžiąja taške $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$, jei teisinga lygybė

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ \dots \\ x_n \to x_n'}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1', x_2', ..., x_n').$$

Priešingu atveju sakoma, kad funkcija taške $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$ turi trūkį.

11.2 Apibrėžimas. Funkcija $f(x_1, x_2, ..., x_n$ vadinama tolydžiąja taške $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$, jei

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : |f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(x_1', x_2', ..., x_n')| < \epsilon, \quad |x_1 - x_1'| < \delta, ..., \quad |x_n - x_n'| < \delta.$$

Kitaip sakant, kelių kintamųjų funkcija yra tolydi, jeigu pakankamai mažus argumento pokyčius atitinkantis funkcijos pokytis yra mažas.

Aukščiau pateikti apibrėžimai nustato funkcijos tolydumą visų kintamųjų atžvilgiu. Jei funkcija tolydi, tai ji tolydi ir kiekivieno ar kelių iš argumentų atžvilgiu. Pažymėkime $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$

11.3 Apibrėžimas. Funkcija $f(X)$ vadinama tolydžia kokioje nors aibėje, jei ji tolydi kiekviename tos aibės taške.

11.1 Teorema. *Jei n kintamųjų funkcijos $f(X)$ ir $g(X)$ yra tolydžios taške M', tai ir funkcijos*

$$f(X) \pm g(X), \quad f(X) \cdot g(X), \quad \frac{f(X)}{g(X)}(g(M') \neq 0)$$

yra tolydžios taške M'.

11.2 Teorema. ***Apie sudėtinės funkcijos tolydumą.*** *Jei funkcijos*

$$x_1 = \phi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \quad x_2 = \phi_2(t_1, t_2, ..., t_m), \quad x_n = \phi_n(t_1, t_2, ..., t_m)$$

yra tolydžios erdvės R^m taške $A = (a_1, a_2, .., a_m)$, o funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra tolydi erdvės R^n taške $B = (b_1, b_2, .., b_n)$, čia $b_i = \phi(a_1, a_2, .., a_m)$, tai tuomet sudėtinė funkcija

$$u = f(\phi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \phi_2(t_1, t_2, ..., t_m), ..., \phi_n(t_1, t_2, ..., t_m))$$

yra tolydi taške $A = (a_1, a_2, .., a_m)$.

Teorema su įrodymu.

Suformuluosime Vejerštraso ir Bolcano – Koši teoremų analogus daugelio kintamųjų funkcijoms:

11.3 Teorema. *Jei funkcija $f(X)$ yra tolydi uždaroje aprėžtoje aibėje, tai ji šioje aibėje yra ir aprėžta.*

11.4 Teorema. *Jei funkcija $f(X)$ yra tolydi uždaroje aprėžtoje aibėje, tai ji šioje aibėje įgyja savo didžiausiąją ir mažiausiąją reikšmes.*

11.5 Teorema. *Jei funkcija $f(X)$ yra apibrėžta ir tolydi jungiojoje aibėje, o dviejuose skirtinguose šios aibės taškuose įgyja skirtingų ženklų reikšmes, tai toje aibėje atsiras toks taškas, kuriame funkcijos reikšmė bus lygi nuliui.*

11.6 Teorema. *Jei funkcija $f(X)$ yra tolydi euklidinės erdvės jungiojoje aibėje D ir šios aibės taškuose M', M'' įgyja skirtingas reikšmes $A \neq B$, tai ši funkcija aibės D taškuose įgyja ir visas tarpines reikšmes tarp A ir B.*

11.2 Kelių kintamųjų funkcijos pilnasis pokytis ir diferencijuojamumas. Diferencijuojamumo ir tolydumo ryšys.

Tarkime, kad funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra apibrėžta aibėje $D \subset R^n$, o $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D$.

11.4 Apibrėžimas. Jei kiekvienam argumentui x_i suteiksime pokytį Δx_i taip, kad taškas $M'(x'_1, x'_2, ..., x'_n) \in D$, tai atitinkamas funkcijos pokytis

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, ..., x_n)$$

yra vadinamas pilnu funkcijos u pokyčiu taške M.

11.5 Apibrėžimas. Jei tarsime, kad $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1} = ... = \Delta x_n = 0$, o $\Delta x_i \neq 0$, tai funkcijos pokytis

$$\Delta_{x_i} u = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ...x_n) - f(x_1, ..., x_n)$$

yra vadinamas daliniu funkcijos u pokyčiu kintamojo x_i atžvilgiu.

11.6 Apibrėžimas. Jei egzistuoja baigtinė dalinio funkcijos u pokyčio kintamojo x_i atžvilgiu santykio su kintamojo pokyčiu Δx_i riba, kai kintamojo x_i pokytis artėja į 0, tai ta riba yra vadinama daline funkcijos u išvestine kintamojo x_i atžvilgiu, t. y.

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Dalinę funkcijos u išvestinę kintamojo x_i atžvilgiu kartais žymėsime ir u'_{x_i}.

11.7 Teorema. *Funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra tolydi taške $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ tada ir tik tada, kai jos pilnas pokytis šiame taške yra lygus 0.*

Teorema su įrodymu.

11.7 Apibrėžimas. Funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ vadinama tolydžiąja taške $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ kintamojo x_i atžvilgiu, jei jos pokytis šio kintamojo atžvilgiu taške M lygus 0, t. y. $\Delta_{x_i} u = 0$.

11.8 Apibrėžimas. Funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra diferencijuojama taške $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, jei jos pilnąjį polytį šiame taške galima išreikšti taip:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + ... + \alpha_n \Delta x_n,$$

čia A_i – skaičiai, nepriklausantys nuo argumentų pokyčių, o α_i – nykstančios funkcijos.

11.8 Teorema. *Jei funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra diferencijuojama taške $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, tai šiame taške egzistuoja visos funkcijos dalinės išvestinės ir*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Teorema su įrodymu.

Remdamiesi šia teorema diferencijuojamos funkcijos pokytį galime užrašyti taip:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \Delta x_n + \alpha_1 \Delta x_1 + ... + \alpha_n \Delta x_n.$$

Pastaba. Jei taške egzituoja visos funkcijos dalinės išvestinės, tai to dar nepakanka, kad funkcija būtų diferencijuojama.

11.9 Teorema. *Jei funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra diferencijuojama taške $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, tai ji šiame taške ir tolydi.*

Teorema su įrodymu.

11.10 Teorema. *Jei funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ taško $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ aplinkoje turi visas dalines pirmosios eilės išvestines ir jos yra tolydžiosios taške $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, tai funkcija u yra diferencijuojama taške $M(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

11.3 Sudėtinės funkcijos diferencijavimas.

11.11 Teorema. *Jei funkcijos*

$$x_1 = \phi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \quad x_2 = \phi_2(t_1, t_2, ..., t_m), \quad x_n = \phi_n(t_1, t_2, ..., t_m)$$

yra diferencijuojamos taške $N(t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0)$, o funkcija $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ diferencijuojama atitinkamame taške $M(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, čia $x_i^0 = \phi(t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0)$, tai tada sudėtinė funkcija

$$u = f(\phi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \phi_2(t_1, t_2, ..., t_m), ..., \phi_n(t_1, t_2, ..., t_m))$$

yra diferencijuojama taške $N(t_1^0, t_2^0, ..., t_m^0)$*, o jos dalinės išvestinės skaičiuojamos taip:*

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}, ...,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_m} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}.$$

Išvestinės $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$ *skaičiuojamos taške* N*, o išvestinės* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ *– taške* M*.*

Teorema su įrodymu.

11.4 Kelių kintamųjų funkcijos diferencialas ir jo formos invariantiškumas.

11.9 Apibrėžimas. Funkcijos $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ diferencijuojamos taške $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ diferencialu du vadinama pagrindinė tiesinė funkcijos pokyčio Δu dalis, t. y.

$$du = A_1 \Delta x_1 + ... + A_n \Delta x_n$$

arba

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

Funkcijos u diferencialas lygus nuliui tik tuomet, kai visų funkcijos argumentų pokyčiai lygūs nuliui.

Kai kintamieji x_1, x_2, ..., x_n yra nepriklausomieji, tai tada jų diferencialai lygūs argumentų pokyčiams, t. y.

$$dx_1 = \Delta x_1, \quad dx_2 = \Delta x_2, \quad ..., \quad dx_n = \Delta x_n,$$

o funkcijos u diferencialas užrašomas taip:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n.$$

Dabar parodysime, kad pirmasis daugelio kintamųjų funkcijos diferencialas yra invariantinis formos atžvilgiu. Aptarsime dviejų kintamųjų funkcijos atvejį, t. y. kai $u = f(x, y)$, kurį nesunkiai galima apibendrinti ir didesniam kintamųjų skaičiui.

Tuo atveju, kai kintamieji x ir y yra nepriklausomieji, tai funkcijos diferencialas yra

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Dabar tarkime, kad kintamieji x ir y yra kintamųjų v ir w funkcijos, t. y.

$$u = f(x, y), \quad x = \phi(v, w), \quad y = \psi(v, w).$$

Jei funkcijos $\phi(v, w)$ ir $\psi(v, w)$ yra diferencijuojamos taške $N(v_0, w_0)$, o funkcija $u = f(x, y)$ diferencijuojama taške $M(x_0, y_0)$, tai tada, remiantis teorema apie sudėtinės funkcijos diferencijavimą, pilnojo funkcijos $u = f(x, y)$ pokyčio pagrindinė dalis išreiškiama taip:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}\right)dw$$

arba

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw\right),$$

tačiau

$$\frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw = dx, \quad \text{o} \quad \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw = dy.$$

Todėl ir šiuo atveju gauname, kad pirmasis funkcijos diferencialas

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Taigi jis – invariantinis formos atžvilgiu.