STOCHASTNIAI MATEMATINIAI MODELIAI

Kęstutis Kubilius

2012 m. gegužės 17 d.

Turinys

1 skyrius

Pagrindinės tikimybių teorijos sąvokos ir apibrėžimai

1.1 Tikimybinė erdvė

1.1.1 σ-algebra

Tarkime aibė $\mathcal{S}$ yra aibių sistema. Aibė V yra vadinama aibių sistemos *vienetu*, jei $V \in \mathcal{S}$ ir kiekviena sistemos $\mathcal{S}$ aibė yra V poaibis.

Pvz. $\mathcal{S} = \{\{1,2\},\{7\},\{1,2,7,9\}\}$, $V = \{1,2,7,9\}$.

1.1 apibrėžimas. *Netuščia aibių sistema $\mathcal{A}$ vadinama aibių algebra, jei*

1) *sistemai priklauso vienetas,*
2) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A},\ A \cap B \in \mathcal{A}$,
3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$,

čia $\overline{A}$ yra aibės A papildinys.

2) sąlygoje pakanka reikalauti, kad arba $A \cup B \in \mathcal{A}$, arba $A \cap B \in \mathcal{A}$, nes $A \cup B = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$, $A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$. Tai išplaukia iš deMorgano dėsnių.

Pavyzdžiai. 1. Bet kurios aibės visų poaibių sistema yra algebra.

2. $\mathcal{A} = \{\emptyset, A\}$, čia $A \neq \emptyset$, yra algebra.

3. Nagrinėkime aibių sistemą $\mathcal{S} = \{\{1,2\},\{4\},\{1,2,3,4,5\}\}$. Ji nėra algebra. Visada šią aibių sistemą galime papildyti aibėmis iki ji taps algebra. Štai keli pildiniai:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{\emptyset,\{1,2,3,4,5\},\{1,2\},\{3,4,5\},\{4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4\},\{3,5\}\},\\
\mathcal{A}_1 &= \{\emptyset,\{1,2,3,4,5\},\{1\},\{2,3,4,5\},\{1,2\},\{3,4,5\},\{4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4\},\\
&\quad \{3,5\},\{1,4\},\{2,3,5\},\{1,3,4,5\},\{2\},\{1,3,5\},\{2,4\}\},\\
\mathcal{F} &= \{\text{visi galimi aibės } \{1,2,3,4,5\} \text{ poaibiai}\}. \qquad \square
\end{aligned}$$

1.2 apibrėžimas. *Netuščia aibių sistema $\mathcal{F}$ vadinama aibių σ-algebra, jei ji yra algebra ir, jei $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tai $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ arba $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.*

Tarkime, V yra aibių sistemos $\mathcal{S}$ vienetas. $\mathcal{S}$ visada galima papildyti naujomis aibėmis – V poaibiais, kad ji virstų σ-algebra. Pakanka tą sistemą papildyti iki visų aibės V poaibių sistemos. Tačiau kartais galima elgtis ekonomiškiau – imti mažiau papildomų aibių. Tarp visų σ-algebrų, kurioms priklauso sistemos $\mathcal{S}$ aibės, yra pati negausiausia $\sigma(\mathcal{S})$, kuri vadinama σ-algebra, generuota sistemos $\mathcal{S}$, arba mažiausia σ-algebra, kuriai priklauso $\mathcal{S}$. Visada egzistuoja vienintelė tokia σ-algebra, t.y. σ-algebra turinti savybes: a) $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$; b) jei $\mathcal{S}$ priklauso kuriai nors aibės V poaibių sistemos σ-algebrai $\mathcal{A}$, tai ir $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$.

Aukščiau pateiktame pavyzdyje mes papildėme aibių sistemą $\mathcal{S}$ iki algebros. Mažiausia algebra, generuota aibių sistemos $\mathcal{S}$, yra algebra $\mathcal{A}$, kurią žymėsime $a(\mathcal{S})$.

Skirtingos aibių sistemos gali generuoti tą pačią σ-algebrą.

1 pavyzdys. Tarkime, $V = \{1, 2, 3\}$. Aišku, kad $a(\{\emptyset, V, \{1\}\}) = a(\{\emptyset, V, \{2, 3\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

2. pavyzdys. Ar aibių sistema $\{[2, 5], (1, 4), \emptyset, (1, 5]\}$ yra algebra?

Spendimas. Aibių sistema $\{[2, 5], (1, 4), \emptyset, (1, 5]\}$ nėra algebra, nes, pvz., aibės $[2, 5]$ papildinys nepriklauso šiai aibių sistemai. Šios aibių sistemos vienetas yra aibė $(1, 5]$. Aibių sistema

$$\{(1, 5], \emptyset, [2, 5], (1, 2), (1, 4), [4, 5], (1, 2) \cup [4, 5], [2, 4)\}$$

bus algebra. $\square$

Aibių, kurios sudaro σ-algebrą $\mathcal{F}$, išvardijimas nėra praktiškas pasirinkimas, kai V nėra skaiti. Dažniausiai tariame, kad tam tikros aibės generuoja mūsų σ-algebrą, t. y. imama mažiausia σ-algebra, į kurią įeina mus dominančios aibės.

Užduotys

1. Sukonstruokite mažiausias algebras generuotas aibių sistemų $\mathcal{S} = \{\{1\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ ir $\mathcal{G} = \{\{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Ar jos sutampa?

2. Ar aibių sistema $\{(2, 4], \{1\}, \emptyset\}$ yra algebra? Jei ji nėra algebra, tai šią aibių sistemą papildyti aibėmis taip, kad ji būtų algebra.

1.1.2 Borelio σ-algebra

Labai svarbus generuotos σ-algebros pavyzdys yra *Borelio* σ-algebra tiesėje, kurią galime apibrėžti

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{(a, b)\colon\ a < b, a, b \in \mathbb{R}\}\big),$$

t. y. σ-algebra generuota atvirųjų intervalų (a, b). Borelio σ-algebros $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ aibės vadinamos *Borelio* aibėmis.

Priminsime, kad jei aibių rinkinys $\mathcal{A}$ yra σ-algebros $\mathcal{G}$ poaibis, tai $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{G}$. Vadinasi, norint parodyti, kad $\sigma(\{A_\alpha\})=\sigma(\{B_\beta\})$ dviem skirtingoms aibių sistemoms $\{A_\alpha\}$ ir $\{B_\beta\}$, reikia įrodyti, kad $A_\alpha \in \sigma(\{B_\beta\})$ visiems α ir kad $B_\beta \in \sigma(\{A_\alpha\})$ visiems β.

Pavyzdžiui, nagrinėkime

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{(a, b)\colon\ a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}\big), \qquad \mathbb{Q} - \text{racionaliųjų skaičių aibė.}$$

Norint įrodyti lygybę $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mums pakanka parodyti, kad bet koks intervalas $(a,b) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$. Šį faktą gauname iš to, kad bet kokiems realiesiems skaičiams $a < b$ egzistuoja tokie racionalieji skaičiai $q_n < r_n$, kad $q_n \downarrow a,\ r_n \uparrow b$ ir

$$(a,b) = \bigcup_n (q_n, r_n) \in \mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}).$$

1.3 teiginys. *Teisingos lygybės*

$$\begin{aligned}\sigma(\{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}) &= \sigma(\{([a,b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}) = \\ &= \sigma(\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}) = \\ &= \sigma(\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{Q}\}) = \\ &= \sigma(\{\textit{atviros aibės} \quad O : O \subset \mathbb{R}\}).\end{aligned}$$

1.4 pastaba. *Realiųjų skaičių aibė O vadinama atviąja, jei kiekvienam $x \in O$ egzistuoja $r > 0$ toks, kad intervalas $(x - r, x + r)$ priklauso O.*

1.5 teiginys. *Kiekviena netuščia atviroji realiųjų skaičių aibė O yra atvirųjų intervalų skaiti sąjunga.*

1.1 uždavinys. *Pažymėkime $\mathcal{I} = \{(a,b]\colon\ a, b \in \mathbb{R}\}$, t.y. $\mathcal{I}$ yra aibė intervalų, kurių galai yra bet kokie $\mathbb{R}$ taškai. Įrodysime, kad $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Sprendimas. Aišku, kad $\mathcal{I} \subset \sigma(\{(a,b) : a < b, a, b \in \mathbb{R}\})$, nes

$$(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(a, b + \frac{1}{n}\Big), \quad a < b.$$

Todėl $\sigma(\mathcal{I}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Belieka įrodyti, kad $(a,b) \in \sigma(\mathcal{I})$. Tai išplaukia iš lygybės

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(a, b - \frac{1}{n}\Big], \quad a < b. \qquad \square$$

Pastebėsime, kad

$$\begin{aligned}[a,b) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(a - \frac{1}{n}, b\Big), \quad a < b \\ \{a\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(a - \frac{1}{n}, a\Big].\end{aligned}$$

Taigi Borelio σ-algebrai $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ priklauso ne tik intervalai (a,b), $(a,b]$, bet ir vientaškės aibės $\{a\}$ bei intervalai $[a,b)$. Šiai σ-algebrai, be jau minėtų intervalų $(a,b]$, (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ ir vientaškės aibės $\{a\}$, priklauso begaliniai intervalai $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, (a, ∞).

1.6 teiginys. *Egzistuoja $\mathbb{R}$ poaibis, kuris nepriklauso $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, t. y. ne visos aibės yra Borelio aibės.*

Nepaisant šio teiginio, praktiškai visos aibės, su kuriomis susiduriame, yra Borelio aibės.

1 pavyzdys. Racionaliųjų skaičių aibė yra Borelo aibė. Kadangi racionaliųjų skaičių aibė yra skaiti $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$, tai ją galima užrašyti kaip sajungą vientaškių aibių $\mathbb{Q} = \cup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$. Iš σ-algebros apibrėžimo išplaukia, kad ji yra Borelio aibė.

2 pavyzdys. Iracionaliųjų skaičių aibė yra Borelo aibė. Kadangi iracionaliųjų skaičių aibė yra racionaliųjų skaičių aibės pildinys iki visų realiųjų skaičių, tai ji yra Borelio aibė.

3 pavyzdys. (Kantoro aibė) Šis pavyzdys rodo, kad Borelio aibėmis gali būti labai komplikuotos aibės. Nagrinėkime vienetinį intervalą $[0, 1]$. Daliname jį į tris lygias dalis. Vidurinę dalį išmetame, t.y. intervalą $A_1 = (1/3, 2/3)$. Gausime aibę $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, kuri susideda iš dviejų intervalų. Kiekvieną iš šių intervalų skaidome į tris lygias dalis ir pašaliname vidurines dalis. Gausime aibę $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$, kuri sudaryta iš keturių intervalų. Tęsiame šį procesą toliau. Tuomet k-oji aibė sudaryta iš 2^k intervalų, kurių kiekvieno ilgis yra 3^{-k}. Aibė

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

vadinama Kantoro aibe. Ji yra Borelio aibė. Ji yra neskaiti aibė. Jos galia – kontinuumas. Be to, išmestų intervalų ilgių suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^k = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1,$$

nes pirmajame žingsnyje išmetame intervalą, kurio ilgis $\frac{1}{3}$, antrajame – $2\,\frac{1}{9}$, o k-tajame – $2^{k-1}\,(\frac{1}{3})^k$.

pav. Kantoro aibė (5 žingsniai)

Baigtiniam intervalui $[a, b]$ apibrėšime Borelio σ-algebrą lygybe

$$\mathcal{B}([a, b]) = \big\{A \cap [a, b] : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\big\}.$$

Kartais mums reikia Borelio σ-algebros apibrėžtos praplėstoje skaičių tiesėje $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Borelio σ-algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ vadinsime σ-algebrą generuotą aibių sistemos iš $\overline{\mathbb{R}}$, kuri sudaryta iš baigtinio skaičiaus nesikertančių intervalų

$$(a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \le b\}, \qquad -\infty \le a < b \le \infty,$$

čia intervalas $(-\infty, b]$ sutapatinamas su aibe $\{x \in \overline{\mathbb{R}} : -\infty \le x \le b\}$.

Daugiamačiu atveju Borelio σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ yra apibrėžiama kaip σ-algebra, generuota daugiakampių $I_1 \times \ldots \times I_d$, čia I_k, $k = 1, \ldots, d$, yra intervalai iš $\mathbb{R}$. Galima įrodyti, kad $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{B_1 \times \ldots \times B_d\})$, čia $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k = 1, \ldots, d$.

1.1.3 Aibės matas

Kas tai yra matas? Nagrinėkime realiųjų skaičių tiesę. Imkime bet kokį baigtinį tos tiesės intervalą I. Jis gali būti $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b). Jo ilgis, t.y. $b - a$, vadinamas intervalo I matu. Žymėsime $m(I)$. Jei turime intervalą $[a, a]$, tai jo matas $m([a, a]) = 0$. Natūralu, kad tuščios aibės $\emptyset$ matas $m(\emptyset) = 0$.

Nagrinėkime aibių sistemą $\mathcal{A}$, kuri sudaryta iš baigtinio skaičiaus nesikertančių intervalų $(a, b]$ junginių. Tarkime, kad aibės $(a, b]$ yra $(0, 1]$ poaibiai ir

$$A = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i], \qquad (a_i, b_i] \cap (a_k, b_k] = \emptyset, \text{ jei } i \neq k.$$

Aibių sistema $\mathcal{A}$ yra algebra. Aibei $A \in \mathcal{A}$ priskiriame skaičių

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Tada m yra matas apibrėžtas algebroje $\mathcal{A}$. Jį galima pratęsti iki vienintelio mato m erdvėje $((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]))$. Matas m vadinamas *Lebego matu* apibrėžtu mačioje erdvėje $((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]))$. Analogiškai galime sukonstruoti σ-baigtinį Lebego matą mačioje erdvėje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, t.y. $m([a, b]) < \infty$ bet kokiems $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Sakoma, kad aibės $N \subset \mathbb{R}$ matas lygus 0 (arba N yra nulinio mato aibė), jei su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja tokia intervalų seka $\{I^n, n \in \mathbb{N}\}$, kad

$$N \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \qquad \text{ir} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m(I^n) < \varepsilon.$$

Tokiu atveju rašoma $m(N) = 0$. Visų nulinio mato aibių klasę žymėsime $\mathcal{N}$.

1.7 teiginys. *(Nulinio mato aibiu savybes)*
1) *Jei $N \in \mathcal{N}$, $A \subset N$, tai $A \in \mathcal{N}$.*
2) *Jei $N_i \in \mathcal{N}$, $i = 1, 2, \ldots$, tai $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \in \mathcal{N}$.*

Įrodymas. 1) Akivaizdu.

2) Laisvai pasirenkame $\varepsilon > 0$. Kiekvienam $i \in \mathbb{N}$ egzistuoja tokia sistema $\{I_i^n, n \in \mathbb{N}\}$, kad

$$N_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_i^n \qquad \text{ir} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_i^n) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Tada

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_i^n \qquad \text{ir} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m(I_i^n) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Dabar užtenka pastebėti, kad intervalų sistema $\{I_i^n, i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ yra skaiti, kaip skaičioji skaičių sistemų sąjunga (jos narių matų sistema nepriklauso nuo sumavimo tvarkos).

Po daugiau intuityviai aiškaus mato apibrėžimo pateiksime formalų apibrėžimą.

1.8 apibrėžimas. *Matu aibės E poaibių algebroje $\mathcal{A}$ vadinamas atvaizdis $\mu\colon \ \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, tenkinantis aksiomas:*

a) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

b) (σ-adityvumas) *jei* $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ *– poromis nesikertančių aibių iš* $\mathcal{A}$ *seka ir* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$*, tai*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Jei $\mu(E) < \infty$*, tai matas* μ *vadinamas baigtiniu.*

1.9 teorema. *Matas* μ *algebroje* $\mathcal{A}$ *pasižymi šiomis savybėmis:*

1) (monotoniškumas) *jei* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$*,* $A_1 \subset A_2$*, tai* $\mu(A_1) \le \mu(A_2)$;

2) (stiprus adityvumas) *jei* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$*, tai*

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2);$$

3) (σ-pusiauadityvumas) *jei aibių iš* $\mathcal{A}$ *sekos* $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ *sąjunga* $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$*, tai*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i);$$

4) (tolydumas iš apačios) *jei* $A_n \uparrow A$ *algebroje* $\mathcal{A}$*, tai* $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$;

5) (tolydumas iš viršaus) *jei* $A_n \downarrow A$ *algebroje* $\mathcal{A}$*, tai* $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$. □

Pavyzdžiui, atvirosios aibės „ilgis" bus skaitaus skaičiaus atvirųjų intervalų ilgių suma, kurių sąjunga lygi nagrinėjamai atvirąjai aibei.

1 pvz. Sakykime $\mathbb{Q}$ yra racionaliųjų skaičių aibė intervale $[0, 1]$. Tada $m(Q) = 0$.

Įrodymas. Bet kokia baigtinė arba skaičioji aibė yra nulinio mato aibė. Iš tikrųjų, bet kokia vientaškė aibė yra nulinio mato, o kiekviena skaičioji aibė yra skaiti vientaškių aibių sąjunga. Lieka pritaikyti 1.7 Teiginio 2 savybę. Todėl racionaliųjų skaičių aibės matas yra 0.

2 pvz. Nagrinėkime Kantoro aibę C. Jos matas $m(C) = 0$, nors ji yra kontinuumo galios.

Įrodymas. Iš 1.9 teoremos ir aibės C apibrėžimo išplaukia, kad

$$m(C) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{2}{3}\Big)^n = 0. \qquad \square$$

Jei intervalas I yra begalinis, t.y. $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (b, ∞), $[b, \infty)$, tai jo matas lygus ∞.

Sąvoka „beveik visur". Sakoma, kad kokia nors erdvės $\mathbb{R}$ taškų savybė galioja beveik visur (sutrumpintai b.v.) aibėje $A \subset \mathbb{R}$, jei ji galioja visuose aibės A taškuose, išskyrus nulinio mato aibę.

3 pvz. 1) $f_n \to f$ b.v. aibėje $A \iff A \backslash \{x \in A\colon \ f_n(x) \to f(x)\} \in \mathcal{N}$

2) Sakoma, kad funkcija $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ yra beveik visur baigtinė, jei $\{x \in A\colon \ f(x) = \pm\infty\} \in \mathcal{N}$

3) Sakoma, kad funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$ yra tolydi beveik visur aibėje $A \subset \mathbb{R}$, jeigu jos visų trūkio taškų aibė yra nulinio mato. Pvz., bet kokia funkcija $f \in D([a, b])$ yra tolydi b.v. intervale [a, b], nes jos trūkio taškų aibė yra skaiti ir todėl yra nulinio mato. (Bet kokia baigtinė arba skaičioji aibė yra nulinio mato aibė). Kitas pavyzdys yra funkcija $f(x) = [x]$, t.y. sveikoji dalis x.

4) Funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{kai } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 2, & \text{kai } x \in \overline{\mathbb{Q}} \cap [0, 1], \end{cases} \qquad g(x) = 2$$

b.v. sutampa.

Užduotys

1. Ar funkcija $f(x) = x - [x]$ yra beveik visur tolydi? Argumentuokite.
2. Ar funkcijų seka $f_n(x)$, $x \in [0, 1]$, konverguoja beveik visur į $f(x)$, $x \in [0, 1]$, jei

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{n}, & \text{kai } x \in \mathbf{Q} \cap [0, 1], \\ 3, & \text{kai } x \in \overline{\mathbf{Q}} \cap [0, 1], \end{cases} \qquad f(x) \equiv 3.$$

Argumentuokite.

3. Duotos funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x \text{ yra racionalusis skaičius}, \\ x, & \text{jei } x \text{ yra iracionalusis skaičius}, \end{cases} \qquad g(x) = x, \qquad h(x) = 0.$$

Nurodykite teisingus atsakymus: a) funkcija $f(x)$ yra beveik visur tolydi; b) funkcija $f(x)$ yra beveik visur trūki; c) funkcija $f(x)$ yra beveik visur lygi funkcijai $g(x)$; d) funkcija $f(x)$ yra beveik visur lygi funkcijai $h(x)$.

1.1.4 Tikimybinė erdvė

Elementariųjų įvykių erdvę pasižymime Ω.

1.10 apibrėžimas. *Porą $(\Omega, \mathcal{F})$, čia $\mathcal{F}$ – aibės Ω poaibių σ-algebra, vadinsime **mačia erdve**. Duotai mačiai erdvei **tikimybinis matas** $\mathbb{P}$ yra funkcija $\mathbb{P}\colon\ \mathcal{F} \to [0, 1]$, tenkinanti savybes:*

$$\begin{aligned} &a) \quad 0 \le \mathbb{P}(A) \le 1, \quad \forall A \in \mathcal{F}; \\ &b) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1; \\ &c) \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k), \quad \textit{jei} \\ &\qquad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \ \textit{yra skaiti nesikertančių aibių } A_k \in \mathcal{F} \textit{ sąjunga.} \end{aligned}$$

Tikimybinė erdvė *yra trejetas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, čia $\mathbb{P}$ yra tikimybinis matas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Visų galimų elementariųjų įvykių erdvės Ω poaibių sistema yra σ-algebra. Tai paprasčiausias σ-algebros pavyzdys.

Papildykime Borelio σ-algebrą $\mathcal{B}([0,1])$ Lebego nulinio mato aibėmis, t.y. aibėmis $\Lambda \subset (0,1]$, kurioms galime rasti tokias Borelio aibes $A \subseteq \Lambda \subseteq B$, kad $m(B \backslash A) = 0$. Gautoji naujoji aibių sistema $\overline{\mathcal{B}}([0,1])$ yra σ-algebra. Ji vadinama intervalo $[0,1]$ Lebego aibių sistema.

Erdvė $([0,1], \overline{\mathcal{B}}([0,1]), m)$ yra tikimybinės erdvės pavyzdys.

1.2 Atsitiktiniai dydžiai ir jų skirstiniai

Sakykime, duota tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ir mati erdvė $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Atsitiktinis dydis (toliau – a. d.) arba mati funkcija yra *funkcija* $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ tokia, kad $\{\omega\colon\ X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$ bet kokiai Borelio aibei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Šį reikalavimą galime susilpninti, pakeisdami bet kokią Borelio aibę B intervalais $(-\infty, \alpha]$, čia α yra bet koks realus skaičius. Taigi pakanka reikalauti, kad bet kokiems $\alpha \in \mathbb{R}$ aibė $\{\omega\colon\ X(\omega) \le \alpha\} \in \mathcal{F}$.

1 pavyzdys. Bet kokiai $A \in \mathcal{F}$ funkcija $\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ yra a. d., nes $\{\omega\colon\ \mathbf{1}_A(\omega) \le \alpha\} = \begin{cases} \Omega, & \alpha \ge 1, \\ \overline{A}, & 0 \le \alpha < 1, \\ \emptyset, & \alpha < 0 \end{cases}$ visos čia išvardytos aibės priklauso $\mathcal{F}$. Toks a. d. vadinamas aibės A indikatoriumi. □

A. d. apibrėžime σ-algebra $\mathcal{F}$ vaidina labai svarbų vaidmenį.

1.2 uždavinys. *Tarkime,* $\Omega = \{1,2,3\}$. *Rasti σ-algebrą $\mathcal{F}$ tokią, kad $(\Omega, \mathcal{F})$ būtų mati erdvė, ir rasti atvaizdį $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$ tokį, kad X nebūtų a. d. erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Sprendimas. Imkime $\mathcal{F} = \{\{1,2,3\}, \emptyset\}$ trivialią σ-algebrą. Tada $(\Omega, \mathcal{F})$ – mati erdvė. Tarkime, $X(\omega) = \omega$, čia $\omega \in \Omega$. Tada

$$\{\omega\colon\ X(\omega) \le 1\} = \{1\} \notin \mathcal{F}.$$

Taigi X nėra a. d.

1.11 apibrėžimas. *Realiuoju paprastuoju a. d. erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ vadiname a. d., įgyjantį tik baigtinį skaičių skirtingų reikšmių.*

Jei paprastasis a. d. $X(\omega)$ įgyja reikšmes $c_1, \dots, c_n$ ir jos visos yra skirtingos, tai pažymėję $A_k = X^{-1}(c_k) = \{\omega\colon\ X(\omega) = c_k\} \in \mathcal{F}$, gauname $X(\omega) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

1.12 teiginys. *Kiekvienam a. d. $X(\omega)$ egzistuoja tokia paprastųjų a. d. seka $X_n(\omega)$, kad $X_n(\omega) \to X(\omega)$, kai $n \to \infty$, kiekvienam fiksuotam $\omega \in \Omega$.*

Įrodymas. Tarkime,

$$f_n(x) = n\mathbf{1}_{\{x>n\}} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} k2^{-n}\mathbf{1}_{(k2^{-n},\,(k+1)2^{-n}]}(x).$$

Jei a. d. $X \geq 0$, tai $X_n = f_n(X)$ yra paprastieji a. d. Kadangi $X \geq X_{n+1} \geq X_n$ ir $X(\omega) - X_n(\omega) \leq 2^{-n}$, kai $X(\omega) \leq n$, tai $X_n(\omega) \to X(\omega)$, kai $n \to \infty$, kiekvienam ω.

Kiekvieną a. d. galima užrašyti dviejų neneigiamų a. d. suma, t. y. $X(\omega) = X_+(\omega) - X_-(\omega)$, čia $X_+(\omega) = \max(X(\omega), 0)$ ir $X_-(\omega) = -\min(X(\omega), 0)$. Tuomet paprastieji a. d. $X_n = f_n(X_+) - f_n(X_-)$ tenkina teiginio reikalavimą. □

1.13 lema. *Tarkime, $\mathcal{E}$ yra tokia aibių sistema, kad $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. A. d. $\xi = \xi(\omega)$ bus $\mathcal{F}$ matus tada ir tik tada, kai su bet kokiomis aibėmis $E \in \mathcal{E}$ įvykiai $\{\omega\colon\ \xi(\omega) \in E\} \in \mathcal{F}$.*

1.14 apibrėžimas. *Duotam a. d. X mažiausią σ-algebrą, kurios atžvilgiu jis yra matus erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, žymėsime $\sigma(X)$. σ-algebrą $\sigma(X)$ vadinsime σ-algebra generuota a. d. X ir pakaitomis ją žymėsime $\sigma(X)$ arba $\mathcal{F}^X$. Tegul a. d. $X_1, \ldots, X_n$ apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje. Mažiausią σ-algebrą, kurios atžvilgiu visi X_k, $k = 1, \ldots, n$, yra matūs erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, žymėsime $\sigma(X_k, k \leq n)$.*

Iš 1.13 lemos išplaukia, kad

$$\sigma(X) = \sigma(\{\omega\colon\ X(\omega) \leq \alpha\}) = \sigma(\{\omega\colon\ X(\omega) \in B\}), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{1.1}$$

Galima įrodyti, kad

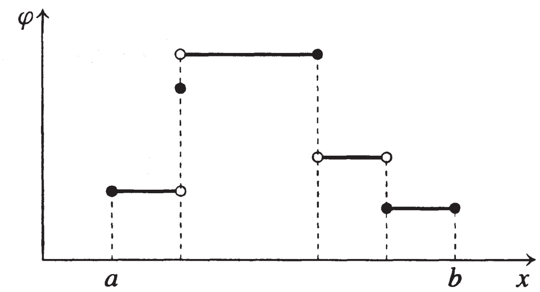
$$\sigma(X_k, k \leq n) = \sigma\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{\omega\colon\ X_k(\omega) \in B_k\}\Big), \qquad \forall B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

1.15 apibrėžimas. *Funkciją $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vadiname **Borelio (mačia) funkcija**, jei g yra a. d. erdvėje $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Pavyzdžiui, visos funkcijos be antros rūšies trūkių (tarp jų tolydžios ir laiptinės funkcijos) yra Borelio.

1.16 apibrėžimas. *Funkcija $\phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ vadinama láiptine funkcija, jei intervalą $[a, b]$ galima taip suskaidyti į baigtinį skaičių intervalų I_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, $\cup_{k=1}^{m} I_k = [a, b]$, kad kiekviename intervale I_k funkcija ϕ būtų pastovi (t.y. $\exists\ c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$: $\phi(x) = c_k$, kai $x \in I_k$).*

1.17 pastaba. *Vientaškė aibė $\{c\}$ laikoma uždaruoju intervalu $[c, c]$.*



Laiptinė funkcija

1.18 apibrėžimas. *Funkcija $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vadinama **Borelio**, jei g yra a. d. erdvėje $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, t. y. $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ g(x) \le \alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ visiems $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1.19 teiginys. *Jei $g\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yra Borelio funkcija ir $X_1, \dots, X_n$ yra a. d., tai $g(X_1, \dots, X_n)$ taip pat yra a. d.*

Pavyzdys. Jei X_1 ir X_2 yra a. d., tai

$$\alpha X_n,\ \alpha \in \mathbb{R}; \qquad X_1 + X_2; \qquad X_1 \cdot X_2 \qquad \text{taip pat yra a. d.}$$

1.20 apibrėžimas. *A. d. X **tikimybiniu skirstiniu** (pasiskirstymu), žymimu P_X, vadinamas tikimybinis matas apibrėžtas $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ toks, kad $P_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega\colon\ X(\omega) \in B\})$ kiekvienai Borelio aibei B.*

1.21 apibrėžimas. *Funkcija $F_X(x) = \mathbb{P}(\{\omega\colon\ X(\omega) \le x\}) = P_X((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$, vadinama a. d. X **pasiskirstymo** funkcija. (Nelygybės ženklai $\le$ ir $<$ keičia tik pasiskirstymo funkcijos savybes. Pirmuoju atveju – ji tolydi iš dešinės, o antruoju – tolydi iš kairės.)*

Taigi tikimybinis pasiskirstymas vienareikšmiškai nusako pasiskirstymo funkciją $F_X(x)$. Teisingas ir atvirkštinis teiginys.

1.22 teiginys. *Pasiskirstymo funkcija F_X vienareikšmiškai apibrėžia a. d. X tikimybinį skirstinį P_X.*

Pasiskirstymo funkcijos trūkio taškų aibė yra baigtinė arba skaiti.

1.23 apibrėžimas. *A. d. vadiname **diskrečiuoju**, jeigu jo įgyjamų reikšmių aibė yra baigtinė arba skaiti.*

Diskretųjį a. d. X, įgyjantį baigtinį ar skaitų skaičių skirtingų reikšmių $\{c_k\}$, galime užrašyti kaip sumą $X(\omega) = \sum_k c_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega)$, $A_k = \{\omega\colon\ X(\omega) = c_k\} \in \mathcal{F}$. Pažymėkime tikimybes $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$.

Sakykime, kad a. d. įgyjantį baigtinį skaičių skirtingų reikšmių ir jos išdėstytos didėjimo tvarka, t. y. $c_1 < c_2 < \dots < c_n$. Tada pasiskirstymo funkcija

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x < c_1, \\ p_1, & \text{kai } c_1 \le x < c_2, \\ p_1 + p_2, & \text{kai } c_2 \le x < c_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k, & \text{kai } c_k \le x < c_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1, & \text{kai } x \ge c_n, \end{cases}$$

arba trumpiau

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x < c_1, \\ \sum_{c_k < x} p_k, & \text{kai } x \ge c_k. \end{cases}$$

Tai – laiptuota funkcija, kurios trūkio taškai yra c_k, o tarp jų funkcija yra pastovi. Pastebėsime, kad $p_k = F(c_k) - F(c_k - 0)$ yra funkcijos F trūkiai.

Užrašas $P_X = P_Y$ arba $X \stackrel{\mathbf{d}}{=} Y$ reiškia, kad a. d. X ir Y yra vienodai pasiskirstę.

2 pavyzdys. Jei $P_X = P_Y$, tai dar nereiškia, kad $X = Y$. Tarkime, kad

$$X = \begin{cases} 1, & \text{kai iškrenta herbas}\,, \\ 0, & \text{kai iškrenta skaičius}\,, \end{cases}$$

ir

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{kai iškrenta herbas}\,, \\ 1, & \text{kai iškrenta skaičius}\,. \end{cases}$$

Tada $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/2$ ir pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x < 0\,, \\ 1/2, & \text{kai } 0 \le x < 1\,, \\ 1, & \text{kai } x \ge 1\,. \end{cases}$$

Aišku, kad $P_X = P_Y$, bet $X(\omega)$ ir $Y(\omega)$ skiriasi kiekvienam ω.

1.24 apibrėžimas. *Sakome, kad a. d. X turi tankį f_X, jei jo pasiskirstymo funkciją F_X galime užrašyti*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

visiems $x \in \mathbb{R}$. Tankis yra neneigiama funkcija ir $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$. Tokia F_X yra tolydi ir beveik visur diferencijuojama, t. y. $\frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x)$ beveik visiems $x \in \mathbb{R}$.

1.25 apibrėžimas. *A. d. X, kurio tankio funkcija*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big\{ - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \Big\}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

čia $\mu \in \mathbb{R}$ ir $\sigma > 0$, vadinamas neišsigimusiu Gauso (arba normaliuoju) a. d., kurio vidurkis μ ir dispersija σ^2. Tokio dydžio skirstinys žymimas $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1.26 apibrėžimas. *n-**mačiu atsitiktiniu dydžiu**, arba n-**mačiu atsitiktiniu vektoriumi**, vadiname $\mathcal{F}$ matų atvaizdį $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, kitaip tariant, vektorinę funkciją $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$, apibrėžtą aibėje Ω, įgyjančią reikšmes iš erdvės $\mathbb{R}^n$ ir tenkinančią sąlygą*

$$\mathbf{X}^{-1}(B) = \{\omega : \mathbf{X}(\omega) \in B\} \in \mathcal{F},$$

kokia bebūtų $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Borelio funkcija $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vadinama $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mati funkcija:

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

kokia bebūtų $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Jei $\mathbf{X}$ yra n-matis atsitiktinis vektorius, o $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – Borelio funkcija, tai $\varphi(\mathbf{X})$ yra m-matis atsitiktinis vektorius.

Jei $\mathbf{X}$ yra atsitiktinis vektorius, tai galime kalbėti apie aibės $\{\omega : X_1(\omega) \leq x_1, ..., X_m(\omega) \leq x_m\}$, arba, užrašant trumpiau, aibės $\{X_1 \leq x_1, ..., X_m \leq x_m\}$, tikimybinį matą. Funkcija

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{(X_1,...,X_m)}(x_1, ..., x_m) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, ..., X_m \leq x_m)$$

yra apibrėžta visoje erdvėje $\mathbb{R}^m$; ji vadinama atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X}$ *pasiskirstymo funkcija*. Pasiskirstymo funkcija yra tolydi iš dešinės kiekvieno argumento atžvilgiu.

Atsitiktinių vektorių pasiskirstymo funkcijų savybės yra analogiškos vienamačių atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcijų savybėms. Suprantama, jos yra kelių kintamųjų funkcijos, todėl turi savo specifiką.

Priminsime daugiamačių pasiskirstymo funkcijų struktūrą. Atsitiktinis vektorius $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)$ bei jo pasiskirstymo funkcija $F_{\mathbf{X}} = F$ yra vadinami *diskrečiaisiais*, jei egzistuoja tokia baigtinė arba skaiti aibė S, kad $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in S) = 1$; vadinami *absoliučiai tolydžiais*, jei egzistuoja integruojama Lebego prasme funkcija $f = f_X$, apibrėžta erdvėje $\mathbb{R}^m$ ir turinti savybę

$$F(x_1, ..., x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_m} f(u_1, ..., u_m) du_1 ... du_m.$$

Funkcija f yra vadinama atsitiktinio vektoriaus $\mathbf{X}$ *tankiu*. Šiuo atveju beveik visur egzistuoja išvestinė

$$\frac{\partial^m F(x_1, ..., x_m)}{\partial x_1 ... \partial x_m},$$

kuri beveik visur yra neneigiama ir lygi $f(x_1, ..., x_m)$. Tankio funkcija, aišku, tenkina lygybę

$$\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, ..., u_m) du_1 ... du_m = 1.$$

Jei daugiamatė pasiskirstymo funkcija $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ yra diskreti (tolydi), tai ir jos vienamatės marginaliosios pasiskirstymo funkcijos $F_{X_k}(x_k)$ $(k = 1, ..., m)$ yra diskrečios (tolydžios), ir atvirkščiai.

1.2.1 Vidurkis ir jo savybės

Tarkime, $X = X(\omega)$ – neneigiamas a. d. ir (X_n) yra paprastųjų a. d. seka, tokia, kad $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$, $n \to \infty$ kiekvienam $\omega \in \Omega$. Iš 1.12 teiginio žinome, kad tokia seka visada egzistuoja.

Priminsime, kad paprastojo a. d. X_n, t. y. a. d. turinčio pavidalą $X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{1}_{A_k}(\omega)$, vidurkis apibrėžiamas lygybe

$$\mathbb{E}X_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \mathbb{P}(A_k).$$

Kadangi $\mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_{n+1}$, tai egzistuoja vidurkio $\mathbb{E}X_n$ riba, kuri gali įgyti ir reikšmę $+\infty$.

1.27 apibrėžimas. *Neneigiamo a. d. X matematiniu vidurkiu vadinamas skaičius*

$$\mathbb{E}X = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n.$$

Šis apibrėžimas yra korektiškas, nes nepriklauso nuo sekos (X_n) parinkimo.

1.28 apibrėžimas. *Sakoma, kad* ***egzistuoja*** *a. d. X matematinis vidurkis $\mathbb{E}X$, arba jis* ***apibrėžtas****, jei bent vienas iš dydžių $\mathbb{E}X^+$ arba $\mathbb{E}X^-$ yra baigtinis. Tada pagal apibrėžimą*

$$\mathbb{E}X \equiv \mathbb{E}X^+ - \mathbb{E}X^-, \quad \textit{čia } X^+ = \max(X,0), \quad X^- = -\min(X,0).$$

Sakoma, kad a. d. X yra integruojamas, jei $\mathbb{E}|X| < \infty$, t. y.

$$\mathbb{E}X^+ < \infty \quad \text{ir} \quad \mathbb{E}X^- < \infty.$$

Matematinis vidurkis $\mathbb{E}X$ dar vadinamas funkcijos X Lebego integralu tikimybinio mato $\mathbb{P}$ atžvilgiu, jei X yra integruojama funkcija. Tai užrašoma

$$\mathbb{E}X = \int X\, d\,\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

A. d. vidurkį galima užrašyti ir remiantis Lebego-Styltjeso integralu. Jei P_X yra a. d. X tikimybinis skirstinys, o F_X – jo pasiskirstymo funkcija, tai

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x\, dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x\, dF_X(x).$$

Jei a. d. X yra diskretus, įgyjantis reikšmes x_k, tai

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k,$$

čia $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.

1.29 teiginys. *Tarkime, kad $\xi = \xi(\omega)$ – a. d., kurio skirstinys P_ξ. Jei $g = g(x)$ – Borelio funkcija ir egzistuoja bet kuris iš integralų $\int_A g(x)\, P_\xi(dx)$ arba $\int_{\xi^{-1}A} g(\xi(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega)$, tai*

$$\int_A g(x)\, P_\xi(dx) = \int_{\xi^{-1}A} g(\xi(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega).$$

Atskiru atveju, jei $A = \mathbb{R}$, tai

$$\mathbb{E}g(\xi(\omega)) = \int_\Omega g(\xi(\omega))\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, P_\xi(dx).$$

Matas P_ξ vienareikšmiškai atkuriamas (atstatomas) žinant pasiskirstymo funkciją F_ξ. Todėl Lebego integralas $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, P_\xi(dx)$ dažnai žymimas $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, F_\xi(dx)$ arba $\int_{\mathbb{R}} g\, P_\xi$ ir vadinamas Lebego-Styltjeso integralu (atžvilgiu pasiskirstymo funkciją F_ξ atitinkančio mato).

1.30 teiginys. *Jei a. d. X turi tankį f_X ir $h\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra Borelio funkcija, tai a. d. $Y = h(X)$ yra integruojamas tada ir tik tada, kai $\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| f_X(x)\, dx < \infty$. Šiuo atveju $\mathbb{E}h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\, dx$.*

1.2.2 Nelygybės

1 teorema (Koši-Švarco nelygybė). *Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y turi antruosius momentus, tai jų sandauga XY turi vidurkį, be to,*

$$M|XY| \leq \sqrt{MX^2 \cdot MY^2}.$$

Bjenemė–Čebyšovo nelygybė. *Jei atsitiktinis dydis Z turi dispersiją, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}Z| \geq \varepsilon) \leq \varepsilon^{-2}\mathbb{D}Z.$$

Į r o d y m a s. Atsitiktiniam dydžiui $(Z - \mathbb{E}Z)^2$ teisinga nelygybė

$$\mathbb{E}(Z - \mathbb{E}Z)^2 \geq \mathbb{E}\big[(Z - \mathbb{E}Z)^2 \mathbf{1}_{\{(Z-\mathbb{E}Z)^2 > \varepsilon^2\}}\big] \geq \varepsilon^2 \mathbb{P}(Z - \mathbb{E}Z)^2 > \varepsilon^2)$$

Todėl

$$\begin{aligned} &P(|Z - MZ| \geq \varepsilon) = P\big((Z - MZ)^2 \geq \varepsilon^2)\big) \leq \\ &\leq \varepsilon^{-2} M(Z - MZ)^2 = \varepsilon^{-2} DZ. \end{aligned}$$

1.3 Charakteristinės funkcijos

Atsitiktinio dydžio X *charakteristine funkcija* vadinsime

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) = \varphi_X(\lambda) = \mathbb{E}e^{i\lambda X} &= \int_\Omega e^{i\lambda X}(\omega) P(d\omega) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} P_X(dx) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dF_X(x), \end{aligned}$$

apibrėžtą visiems $\lambda \in R$.

Jei X yra diskretusis atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes x_k su tikimybėmis $P(X = x_k) = p_k$, tai jo charakteristinę funkciją galime užrašyti šitaip:

$$\varphi_X(\lambda) = \sum_k e^{i\lambda x_k} p_k.$$

Jei X yra absoliučiai tolydus dydis su tankio funkcija f_X, tai

$$\varphi_X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f_X(x) dx.$$

4 teorema. *Jei a ir b yra realios konstantos, X – atsitiktinis dydis, tai*

$$\varphi_{aX+b}(\lambda) = e^{ib\lambda} \varphi_X(a\lambda).$$

2 (vienaties) teorema. *Jei dvi pasiskirstymo funkcijos F ir G turi tą pačią charakteristinę funkciją, t. y. su visais $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dG(x),$$

tai jos sutampa ($F(x) = G(x)$).

Iš aukščiau suformuluotų teoremų matome, kad kiekvienas a. d. turi vienintelę charakteristinę funkciją, o charakteristinė funkcija charakterizuoja (apibūdina) vienareikšmiškai pasiskirstymo funkciją.

1.31 apibrėžimas. *Jei F yra n-matė pasiskirstymo funkcija erdvėje $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ tai jos charakteristine funkcija vadinama funkcija*

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda,\mathbf{x})} dF(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k} dF(\mathbf{x}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

1.32 apibrėžimas. *Jei $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ yra a. v., apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ir įgyjantis reikšmes $\mathbb{R}^n$, tai jo charakteristine funkcija vadinama funkcija*

$$f_{\mathbf{X}}(\lambda) = \mathbb{E}e^{i(\lambda,\mathbf{X})} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda,\mathbf{x})} dF_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \qquad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

čia $F_{\mathbf{X}}$ – a. v. $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ pasiskirstymo funkcija, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

1.4 Nepriklausomumas

1.33 apibrėžimas. *A. d. X_1, X_2, $\ldots$, X_n, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ yra* ***nepriklausomi****, jei bet kokioms aibėms $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in B_k).$$

1.34 apibrėžimas. *Tegul tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ duotos σ-algebros $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$, kurios yra $\mathcal{F}$ poaibiai. σ-algebros $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ yra* ***nepriklausomos****, jei bet kokioms aibėms $A_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n$*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

1.35 teorema. *A. d. $X_1, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, jei tenkinamas* *nors vienas iš šių ekvivalenčių teiginių:*

a) $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1,\dots,X_n \le x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k)$, $\forall x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$;

b) jei a. v. $(X_1,\dots,X_n)$ *yra absoliučiai tolydus su tankio funkcija* $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$ *ir beveik visur teisinga lygybė*

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k);$$

c) $\mathbb{E}\exp\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k\} = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\exp\{i\lambda_k X_k\}, \qquad \forall\lambda_k \in \mathbb{R}.$

1.36 teiginys. *Tarkime, X ir Y yra nepriklausomi a. d., f ir g yra tokios $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mačios funkcijos, kad $\mathbb{E}|f(X)| < \infty$, $\mathbb{E}|g(Y)| < \infty$. Tada $\mathbb{E}|f(X)g(Y)| < \infty$ ir*

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}f(X)\cdot\mathbb{E}g(Y).$$

1.37 išvada. *Tarkime, $X_1,\dots,X_n$ yra tokie nepriklausomi a. d., kad $\mathbb{E}|X_k| < \infty$, $1 \le k \le n$. Tada*

$$\mathbb{E}\Big|\prod_{k=1}^{n} X_k\Big| < \infty \qquad \textit{ir} \qquad \mathbb{E}\Big(\prod_{k=1}^{n} X_k\Big) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}X_k.$$

1.38 apibrėžimas. *A. d. $X_1, X_2,\dots,X_n$ vadinami poriškai nepriklausomais, jei visos poros yra nepriklausomi a. d.*

Akivaizdu, kad iš a. d. nepriklausomumo išplaukia jų poriškas nepriklausomumas. Iš poriško nepriklausomo neišplaukia a.d. nepriklausomumas.

Pavyzdys. Tarkime, kad $\Omega := \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, $\mathcal{F} := 2^{\Omega}$, $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) := \frac{1}{4}$, $1 \le k \le 4$. Apibrėšime a. d. $X_i\colon\ (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \to \{0,1\}$, $i = 1,2,3$, lygybėmis

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \omega = \omega_1,\omega_{1+i}, \\ 0, & \text{jei} \quad \omega \ne \omega_1,\omega_{1+i}. \end{cases}$$

A. d. X_1, X_2, X_3 yra poriškai nepriklausomi. Patikrinsime tik porą X_1, X_2. Pastebėsime, kad

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \omega = \omega_1,\omega_2, \\ 0, & \text{jei} \quad \omega = \omega_3,\omega_4 \end{cases} \quad \text{ir} \quad X_2 = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \omega = \omega_1,\omega_3, \\ 0, & \text{jei} \quad \omega = \omega_2,\omega_4 \end{cases}.$$

Tikrai,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) =& \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0),\\
\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) =& \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1),\\
\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) =& \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0),\\
\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) =& \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1).
\end{aligned}$$

Tačiau

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1).$$

1.39 pastaba. *Su kompiuteriu mes generuojame poriškai nepriklausomus a. d., bet ne nepriklausomus a. d.*

1.40 apibrėžimas. *Kvadratu integruojami a. d. X ir Y, t. y. $\mathbb{E}X^2 < \infty$ ir $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje, vadinami* ***nekoreliuotais****, jei $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$.*

1.41 apibrėžimas. *Sakysime, kad a. d. X nepriklauso nuo σ-algebros $\mathcal{G}$, jei X ir $\mathbf{1}_B$, $\forall B \in \mathcal{G}$, yra nepriklausomi a. d., t. y.*

$$\mathbb{P}(X \in A_1, \mathbf{1}_B \in A_2) = \mathbb{P}(X \in A_1)\mathbb{P}(\mathbf{1}_B \in A_2), \qquad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ ir } \forall B \in \mathcal{G}.$$

1.42 apibrėžimas. *Dvi σ-algebros $\mathcal{G}$ ir $\mathcal{H}$ tokios, kad $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ vadinamos* ***nepriklausomomis****, jei bet kurie du įvykiai $A \in \mathcal{G}$ ir $B \in \mathcal{H}$ yra nepriklausomi. Jei turime baigtinį skaičių σ-algebrų $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$, kurios yra $\mathcal{F}$ poaibiai, tai jos yra nepriklausomos, jei bet kurie n įvykiai $A_1 \in \mathcal{G}_1, \dots, A_2 \in \mathcal{G}_n$ yra nepriklausomi.*

1.43 teorema. *Jei σ-algebros $\mathcal{G}_1$ ir $\mathcal{G}_2$ yra generuotos nepriklausomų algebrų $\mathcal{A}_1$ ir $\mathcal{A}_2$, tai jos yra nepriklausomos.*

1.3 uždavinys. *Įrodyti, kad a. d. ξ ir η yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai jų generuotos σ-algebros $\sigma(\xi)$ ir $\sigma(\eta)$ yra nepriklausomos.*

Sprendimas. σ-agebras $\sigma(\xi)$ ir $\sigma(\eta)$ generuoja atitinkamai aibės $\{\xi \in A\}$ ir $\{\eta \in B\}$, čia A ir B yra Borelio aibės iš $\mathbb{R}$. Todėl $\sigma(\xi)$ ir $\sigma(\eta)$ yra nepriklausomos tada ir tik tada, kai įvykiai $\{\xi \in A\}$ ir $\{\eta \in B\}$ yra nepriklausomi bet kokioms Borelio aibėms A ir B, tai savo ruožtu yra ekvivalentu, kad ξ ir η yra nepriklausomi. □

Uždavinio teiginį galima apibendrinti.

1.44 teiginys. *A. d. $\xi_1, \dots, \xi_n$ yra nepriklausomi tada ir tik tada, kai σ-algebros $\sigma(\xi_1), \dots \sigma(\xi_n)$ yra nepriklausomos.*

1.45 teiginys. *Tarkime, φ_1 ir φ_2 – Borelio funkcijos, o ξ_1 ir ξ_2 – nepriklausomi a. d. Tuomet a. d. $\varphi_1(\xi_1)$ ir $\varphi_2(\xi_2)$ taip pat yra nepriklausomi*

Įrodymas. Reikia įrodyti, kad

$$\mathbb{P}(\varphi_1(\xi_1) \in B_1, \varphi_2(\xi_2) \in B_2) = \mathbb{P}(\varphi_1(\xi_1) \in B_1)\mathbb{P}(\varphi_2(\xi_2) \in B_2). \tag{1.2}$$

Aibės $\{x\colon\ \varphi_i(x) \in B_i\} = \varphi_i^{-1}(B_i)$ yra Borelio. Todėl

$$\{\omega\colon\ \varphi_i(\xi_i) \in B_i\} = \{\omega\colon\ \xi_i \in \varphi_i^{-1}(B_i)\}$$

ir (1.2) lygybė gaunama, kai a. d. ξ_1 ir ξ_2 yra nepriklausomi. □

1.46 teorema. *Tarkime, (ξ_n) yra seka nepriklausomų a. d. Bet kokiam $k \geq 1$ σ-algebra $\sigma(\xi_{n+k})$ nepriklauso nuo $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.*

Nepriklausomi a. d. yra nekoreliuoti, bet atvirkščiai nebūtinai.

Pavyzdys. Pateiksime nekoreliuotų, bet priklausomų a. d. pavyzdį. Tegul a. d. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, o a. d. Z įgyja dvi reikšmes: $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = -1) = 1/2$. A. d. X ir Z yra nepriklausomi. Nagrinėsime a. d. $Y := Z \cdot X$. Parodysime, kad X ir Y yra nekoreliuoti, bet X ir Y nėra nepriklausomi. Aišku, kad

$$\mathbb{E}\,(XY) = \mathbb{E}(X^2 \cdot Z) = \mathbb{E}X^2 \cdot \mathbb{E}Z = 0,$$

nes Z ir X^2 yra nepriklausomi, o $\mathbb{E}Z = 0$ ir $\mathbb{E}X^2 = 1$. Be to, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Tikrai,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(Y \leq y, Z = 1) + \mathbb{P}(Y \leq y, Z = -1) = \\
&= \mathbb{P}(X \leq y, Z = 1) + \mathbb{P}(-X \leq y, Z = -1) = \\
&= \mathbb{P}(X \leq y)\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(-X \leq y)\mathbb{P}(Z = -1) = \\
&= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X \leq y) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(-X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y).
\end{aligned}$$

Belieka įrodyti, kad X ir Y nėra nepriklausomi. Fiksuojame a>0. Pastebėsime, kad $\mathbb{P}(X \geq a) > 0$ ir

$$\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X \geq 0) > \mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(ZX \geq a),$$

nes ZX skirstinys sutampa su X skirstiniu. Todėl

$$\mathbb{P}(ZX \geq a, X \geq a) = \mathbb{P}(Z = 1, X \geq a) = \mathbb{P}(Z = 1)\mathbb{P}(X \geq a) > \mathbb{P}(ZX \geq a)\mathbb{P}(X \geq a).$$

Vadinasi, a. d. X ir Y nėra nepriklausomi. Pastebėsime, kad $|X| = |Y|$. Tai irgi rodo, kad a. d. X ir Y nėra nepriklausomi. □

1.5 Atsitiktinių dydžių konvergavimas

1.47 apibrėžimas.

a) X_n *konverguoja į* X *b. v. arba su tikimybe 1, jei*

$$\mathbb{P}\Big(\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big) = 1.$$

Žymėsime $X_n \xrightarrow{\text{b. v.}} X$ *arba* $X_n \to X$ *b. v.*

b) X_n *konverguoja į* X *pagal tikimybę, jei kiekvienam* $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\omega\colon\ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right) \to 0, \text{ kai } n \to \infty.$$

Žymėsime $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

c) X_n *konverguoja į* X L^p *prasme,* $0 < p < \infty$, *jei*

$$\mathbb{E}\,|\,X_n - X|^p \to 0.$$

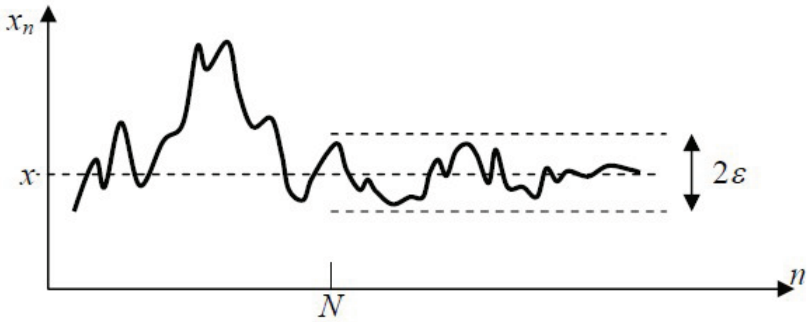
Žymėsime $X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^p} X$.

d) X_n *konverguoja į* X *pagal pasiskirstymą, jei*

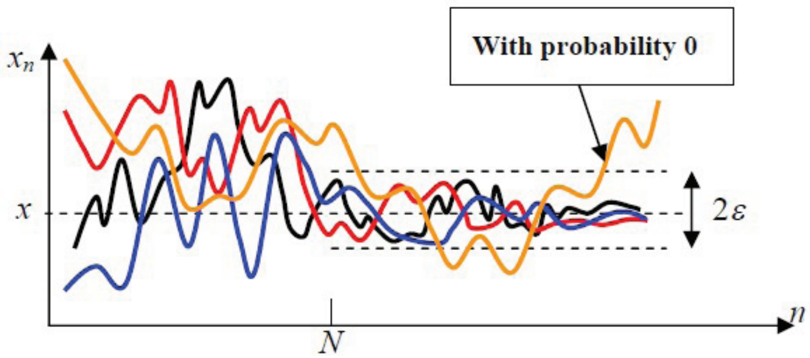
$$F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$$

kiekviename ribinės pasiskirstymo funkcijos $F_X(x)$ *tolydumo taške* x.

Žymėsime $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X$.



Skaičių sekos konvergavimas



Konvergavimas su tikimybe 1 arba b. v.

1.48 pastaba. *Konvergavimas pagal pasiskirstymą yra ekvivalentus silpnam konvergavimui, t.y.* X_n *konverguoja į* X *silpnai, jei* $\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$ *bet kokiai tolydžiai aprėžtai funkcijai* $f(x)$*, kai* $n \to \infty$*. Žymėsime* $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X$ *arba* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$*. Apie tai pakalbėsime vėliau.*

Jei turime konverguojančią skaičių seką (a_n), tai iš matematinės analizės kurso žinome, kad riba yra vienintelė. Kaip yra kai nagrinėjame a. d. seka konverguojanti viena iš anksčiau apibrėžtų prasmių? Kaip suprantame vienatį a. d.? Jei seka $X_n \to X$ ir $X_n \to Y$ b. v., pagal tikimybę ar L^p prame, tai riba yra vienintelė, jei $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Silpno konvergavimo atveju vienatis suprantama kaip skirstinių sutapimas $F_X(x) = F_Y(x)$, t. y. $X \overset{\mathbf{d}}{=} Y$.

1.49 teorema. *(vienatis) Jei a. d. seka* (X_n) *konverguoja b. v., pagal tikimybę,* L^p *prasme ar silpnai, kai* $n \to \infty$*, tai ribinis a. d. yra vienintelis.*

Tiriant silpną konvergavimą labai svarbų vaidmenį vaidina a. d. nepriklausomumas.

1 pavyzdys. Tarkime, kad (X_n) yra seka nepriklausomų a. d. turinčių tą patį tankį

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{-\alpha-1}, & \text{kai} \quad x > 1, \alpha > 0, \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Pasižymėkime $Y_n = n^{-1/\alpha} \max_{1 \le k \le n} X_k$, $n \ge 1$. Įrodysime, kad a. d. seka (Y_n) silpnai konverguoja.

Rasime X_n pasiskirstymo funkciją:

$$F(x) = \begin{cases} \alpha \int_1^x y^{-\alpha-1} dy = 1 - x^{-\alpha}, & \text{kai} \quad x > 1, \alpha > 0, \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Tada

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) =& \mathbb{P}\Big(\max_{1 \le k \le n} X_k \le x n^{1/\alpha}\Big) = \mathbb{P}(X_1 \le x n^{1/\alpha}, X_2 \le x n^{1/\alpha}, \dots, X_n \le x n^{1/\alpha}) \\ =& \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \le x n^{1/\alpha}) = \big(F(x n^{1/\alpha})\big)^n \\ =& \Big(1 - \frac{1}{n x^{\alpha}}\Big)^n \longrightarrow e^{-x^{-\alpha}}, \quad \text{kai } n \to \infty. \qquad \square \end{aligned}$$

Kyla klausimas, kaip susieti įvairūs konvergavimai? Pateiksime sekų konvergavimo ryšių teiginius:

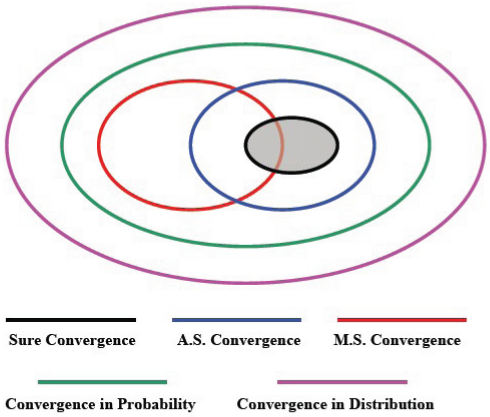
a) iš $X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^p} X$ išplaukia, kad $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$;

b) iš $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ išplaukia, kad $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X$;

c) iš $X_n \xrightarrow{\mathbf{b.\ v.}} X$ išplaukia, kad $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$;

d) jei $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, tai egzistuoja toks posekis n_k, kad $X_{n_k} \xrightarrow{\mathbf{b.\ v.}} X$, kai $k \to \infty$;

e) jei $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} C$, čia C – konstanta, tai $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} C$. (Akivaizdu, kad teisingas ir atvirkščias teiginys.)



1.50 lema (Sluckio)**.** *Sakykime,* $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X$ *ir* $Y_n \xrightarrow{\mathbf{d}} c$*, čia* c *yra konstanta. Tada:*

a) $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X + c$*;*

b) $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{\mathbf{d}} cX$*;*

c) $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathbf{d}} \frac{X}{c}$*, kai* $c \neq 0$.

1.51 lema (Sluckio)**.** *Sakykime,* $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ *ir* $\eta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta$*, o* $\varphi(x, y)$ *– tolydi funkcija. Tada:*

$$\varphi(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \varphi(\xi, \eta).$$

1.52 teorema. *Sakykime, seka* $(\mathbf{X}_n)$ *ir* $\mathbf{X}$ *yra* k*-mačiai vektoriai (toliau – a. v.), o* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ *– Borelio funkcija. Tarkime, kad* $C(\mathbf{g})$ *– aibė funkcijos* $\mathbf{g}$ *tolydumo taškų ir* $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in C(\mathbf{g})) = 1$*, t.y. funkcija* $\mathbf{g}$ *yra tolydi su* $P_{\mathbf{X}}$ *tikimybe* 1*. Tada:*

a) *jeigu* $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathbf{b.\ v.}} \mathbf{X}$, *tai* $\mathbf{g}(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{\mathbf{b.\ v.}} \mathbf{g}(\mathbf{X})$;

b) *jeigu* $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{X}$, *tai* $\mathbf{g}(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{g}(\mathbf{X})$;

c) *jeigu* $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathbf{d}} \mathbf{X}$, *tai* $\mathbf{g}(\mathbf{X}_n) \xrightarrow{\mathbf{d}} \mathbf{g}(\mathbf{X})$.

2 pavyzdys. Jei $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X$, o $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, tai $X_n^2 \xrightarrow{\mathbf{d}} \chi_1^2$, nes funkcija $g(x) = x^2$ yra tolydi. Čia χ_1^2 pasiskirstymas yra chi-kvadrat.

3 pavyzdys. Jei $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbf{d}} (X, Y)$, o $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$, tai $X_n/Y_n \xrightarrow{\mathbf{d}}$ į Koši skirstinį. Čia $\mathbf{I}$ – vienetinė matrica.

4 pavyzdys. Dabar pateiksime funkcijos g pavyzdį tokį, kad $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, bet $g(X_n) \overset{\mathbf{d}}{\not\to} g(X)$. Tarkime, kad

$$g(t) = \begin{cases} t-1, & t < 0, \\ t+1, & t \geq 0, \end{cases} \qquad X_n = -\frac{1}{n} \quad \text{ir} \quad X = 0.$$

Funkcija g turi vienintelį trūkį taške 0. Todėl ji trūki su P_X-tikimybe 1. Aišku, kad $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X = 0$, kai tuo tarpu $g(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} -1$, bet $g(X) = g(0) = 1 \neq -1$.

1.6 Momentų konvergavimas

1.53 teorema (monotoninis konvergavimas)**.** *Sakykime, X, Y, X_1, X_2, $\ldots$ yra a. d.:*
a) jei $X_n \geq Y$ su visais $n \geq 1$, $\mathbb{E}Y > -\infty$ ir $X_n \uparrow X$, tai $\mathbb{E}X_n \uparrow \mathbb{E}X$.
b) jei $X_n \leq Y$ su visais $n \geq 1$, $\mathbb{E}Y < \infty$ ir $X_n \downarrow X$, tai $\mathbb{E}X_n \downarrow \mathbb{E}X$.

1.54 išvada. *Sakykime, (X_n) – seka neneigiamų a. d. Tuomet*

$$\mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n.$$

1.55 lema (Fatu)**.** *Tarkime, $Y, X_1, X_2, \ldots$ yra a. d.*
a) Jei $X_n \geq Y$ visiems $n \geq 1$ ir $\mathbb{E}Y > -\infty$, tai

$$\mathbb{E}\liminf_n X_n \leq \liminf_n \mathbb{E}X_n\,.$$

b) Jei $X_n \leq Y$ visiems $n \geq 1$ ir $\mathbb{E}Y < \infty$, tai

$$\limsup_n \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}\limsup_n X_n\,.$$

c) Jei $|X_n| \leq Y$ visiems $n \geq 1$ ir $\mathbb{E}Y < \infty$, tai

$$\mathbb{E}\liminf_n X_n \leq \liminf_n \mathbb{E}X_n \leq \limsup_n \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}\limsup_n X_n\,.$$

1.56 teorema. *Tarkime, kad neneigiamų a. d. seka (X_n) yra tokia, kad $X_n \xrightarrow{\text{b. v.}} X$ (arba $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) ir $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X < \infty$. Tada*

$$\mathbb{E}\,|\,X_n - X| \to 0, \quad \text{kai} \quad n \to \infty.$$

1.57 teiginys (Jenseno nelygybė). *Sakykime, $g(\cdot)$ yra iškila į apačią funkcija, t. y.*

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 \le \lambda \le 1.$$

Jei X yra integruojamas a. d. ir $g(X)$ irgi integruojamas, tai

$$g(\mathbb{E}X) \le \mathbb{E}(g(X)).$$

1.58 pastaba. *Jei intervale (a, b) funkcija $f(x)$ turi baigtinę antrąją išvestinę, kuri yra teigiama, tai funkcijos $f(x)$ grafikas intervale (a, b) yra iškilas į apačią. Pvz., funkcijos x^p $(p \ge 1, x > 0)$, e^{-x}, $x \ln x$ $(x > 0)$, $|x|$ yra iškilos į apačią.*

1.59 pastaba. *Iš Jenseno nelygybės gauname, kad*

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^p} X \text{ išplaukia } X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^r} X, \quad \text{jei} \quad 0 < r < p.$$

1.60 apibrėžimas. *Sakysime, kad a. d. seka (X_n) yra **tolygiai integruojama**, jei*

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n \mathbb{E}\left(|\, X_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|\, X_n| > M\}}\right) = 0.$$

1.61 lema. *Tegul a. d. seka (X_n) tokia, kad $|\, X_n| \le Y$ ir $\mathbb{E}Y < \infty$. Tada seka (X_n) yra tolygiai integruojama.*

1.62 lema. *Tam, kad a. d. seka (X_n) būtų tolygiai integruojama būtina ir pakankama, kad būtų patenkintos sąlygos*

$$a) \quad \sup_n \mathbb{E}|\, X_n| < \infty; \qquad b) \quad \sup_n \mathbb{E}\left(|\, X_n| \cdot \mathbf{1}_A\right) \to 0, \quad \text{kai} \quad \mathbb{P}(A) \to 0.$$

Tam, kad seka (X_n) būtų tolygiai integruojama, pakanka, kad

$$\sup_n \mathbb{E}|\, X_n|^{\,1+\varepsilon} < \infty$$

kokiam nors $\varepsilon > 0$.

1.63 teorema (mažoruojamasis konvergavimas). *Sakykime, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $|X_n| \le |Y|$ b. v. (visiems n) ir $\mathbb{E}|Y|^r < \infty$. Tada*

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^r} X.$$

1.64 išvada (aprėžtasis konvergavimas). *Tarkime, a. d. X_n yra aprėžti, t. y. egzistuoja konstanta C tokia, kad su visais n teisinga nelygybė $|X_n| \le C$. Jei $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$, tai $X_n \xrightarrow{\mathbf{L}^r} X$, $r > 1$.*

1.65 teorema. *Sakykime, $X_n \xrightarrow{\mathbf{d}} X$ ir seka a. d. (X_n^r) yra tolygiai integruojama kokiam nors $r > 0$. Tada $\mathrm{E}|X|^r < \infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n^r = \mathbb{E}X^r \quad \text{ir} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|^r = \mathbb{E}|X|^r.$$

1.7 Sąlyginės tikimybės ir sąlyginiai vidurkiai

1.66 apibrėžimas. *Tegul X – a. d., apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ir integruojamas. A. d. X* ***sąlyginiu vidurkiu*** *$\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ atžvilgiu vadinamas toks a. d. Z, apibrėžtas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{G})$, kad*

$$\mathbb{E}\left[(X - Z) \cdot \mathbf{1}_A\right] = 0 \quad \textit{arba} \quad \mathbb{E}(X \cdot \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(Z \cdot \mathbf{1}_A)$$
$$\textit{arba} \quad \int_A X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_A Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega) \qquad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Jis žymimas $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)$. Kai $\mathcal{G}$ yra σ-algebra generuota a. d. Y, t. y. $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, tai sąlyginis vidurkis žymimas $\mathbb{E}\left(X \mid Y\right)$.

Savybės:

a) Jei $C -$ konstanta ir $X = C$, tai $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) = C$ (b. v.);

b) Jei $X \leq Y$, tai $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \leq \mathbb{E}\left(Y \mid \mathcal{G}\right)$ (b. v.);

c) $|\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)| \leq \mathbb{E}\left(|X| \mid \mathcal{G}\right)$ (b. v.);

d) $\mathbb{E}\left(\alpha X + \beta Y \mid \mathcal{G}\right) = \alpha\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) + \beta\mathbb{E}\left(Y \mid \mathcal{G}\right)$ (b. v.);

e) $\mathbb{E}\,\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) = \mathbb{E}X$ (b. v.);

f) $\mathbb{E}\left(XY \mid \mathcal{G}\right) = X\mathbb{E}\left(Y \mid \mathcal{G}\right)$ (b. v.), jei X yra $\mathcal{G}$-matus;

g) $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) = \mathbb{E}X$ (b. v.), jei X nepriklauso nuo $\mathcal{G}$;

h) $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) \mid \mathcal{H}\right) = \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{H}\right)$ (b. v.), jei $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$;

i) $\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right) = \mathbb{E}X$ (b. v.), jei $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$;

j) Jei $g(\cdot)$ yra iškila į apačią funkcija ir $\mathbb{E}|X| < \infty$, $\mathbb{E}|g(X)| < \infty$, tai teisinga Jenseno nelygybė $g\big(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{G}\right)\big) \leq \mathbb{E}\left(g(X) \mid \mathcal{G}\right)$ (b. v.). $\square$

1.67 apibrėžimas. *Tarkime, kad ξ yra integruojamas a. d., o η – diskretus a. d. įgyjantis skaitų reikšmių skaičių $\{y_k\}$. Tuomet a. d.*

$$\mathbb{E}(\xi \mid \eta)(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi \mid \eta = y_k)\mathbf{1}_{\{\eta = y_k\}}(\omega)$$

vadinsime a. d. ξ sąlyginiu vidurkiu atžvilgiu a. d. η. Čia

$$\mathbb{E}(\xi \mid \eta = y_k) = \frac{\mathbb{E}(\xi\mathbf{1}_{\{\eta = y_k\}})}{\mathbb{P}(\eta = y_k)}.$$

Koks ryšys tarp 1.66 ir 1.67 apibrėžimų? Tarkime, kad $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$ – tam tikras baigtinis ar skaitus aibės Ω skaidinys į atomus toks, kad

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \Omega, \qquad D_n \cap D_m = \emptyset\ (n \neq m), \qquad \mathbb{P}(D_n) > 0, \quad n \geq 1.$$

1.68 teorema. *Jei* $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{D})$ *ir* ξ *– a. d. turintis vidurkį* $\mathbb{E}\xi$*, tai*

$$\mathbb{E}\,(\xi \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}\,(\xi \mid D_n) \qquad (\textit{b. v. aibėje } D_n)$$

arba kitu pavidalu

$$\mathbb{E}\,(\xi \mid \mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}\,(\xi \mathbf{1}_{D_n})}{\mathbb{P}(D_n)} \qquad (\textit{b. v. aibėje } D_n)$$

Įrodymas. Jei ξ yra $\sigma(\mathcal{D})$-matus a. d., tai jį galime užrašyti pavidalu

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbf{1}_{D_k}(\omega),$$

čia $x_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, t. y. a. d. ξ įgyja pastovias reikšmes skaidinio aibėse D_k, $k \geq 1$. Šito teiginio įrodymą galima rasti [6] knygoje 175 psl.

Kadangi a. d. $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G})$ yra $\mathcal{G}$-matus, tai $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G}) = K_n$, kai $\omega \in D_n$ (nes a. d. $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G})$ įgyja pastovias reikšmes skaidinio aibėse D_k), čia K_n – konstanta. Bet

$$\int_{D_n} \xi \, d\mathbb{P} = \int_{D_n} \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G}) \, d\mathbb{P} = K_n \mathbb{P}(D_n).$$

Vadinasi,

$$K_n = \frac{1}{\mathbb{P}(D_n)} \int_{D_n} \xi \, d\mathbb{P} = \frac{\mathbb{E}\,(\xi \mathbf{1}_{D_n})}{\mathbb{P}(D_n)} = \mathbb{E}\,(\xi \mid D_n)\,. \qquad \square$$

Ką tik įrodyta teorema teigia, kad 1.66 apibrėžimas yra natūralus sąlyginio vidurkio atžvilgiu diskretaus a. d. apibendrinimas. Kadangi diskretus a. d. turi pavidalą $\eta(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mathbf{1}_{D_k}(\omega)$, $D_k = \{\omega\colon\ \eta(\omega) = y_k\}$, ir $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$, tai $\sigma(\eta) = \sigma(\mathcal{D})$, čia $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \ldots\}$.

1.4 uždavinys. *Tegul* X *ir* Y *– nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, tolygiai pasiskirstę intervale* $[0,1]$, $\mathbf{Z} = (X, Y)$, $T = \mathbf{1}_A(\mathbf{Z}) + 5 \cdot \mathbf{1}_B(\mathbf{Z})$, *čia*

$$A = \{0 < x < 1/4, 3/4 < y < 1\}\,, \quad B = \{3/4 < x < 1, 0 < y < 1/2\}\,.$$

Apskaičiuoti $\mathbb{E}(T|X)$.

Sprendimas.

$$\begin{aligned} A &= \{0 < x < 1/4\} \times \{3/4 < y < 1\} = A_1 \times A_2; \\ B &= \{3/4 < x < 1\} \times \{0 < y < 1/2\} = B_1 \times B_2. \end{aligned}$$

Tada

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A(\mathbf{Z}) &= \mathbf{1}_{A_1 \times A_2}(X, Y) = \mathbf{1}_{A_1}(X) \cdot \mathbf{1}_{A_2}(Y); \\ \mathbf{1}_B(\mathbf{Z}) &= \mathbf{1}_{B_1 \times B_2}(X, Y) = \mathbf{1}_{B_1}(X) \cdot \mathbf{1}_{B_2}(Y) \end{aligned}$$

ir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T|X) &= \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{A_1}(X)\cdot\mathbf{1}_{A_2}(Y)+5\cdot\mathbf{1}_{B_1}(X)\cdot\mathbf{1}_{B_2}(Y)\Big|X\Big) = \\
&= \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{A_1}(X)\cdot\mathbf{1}_{A_2}(Y)\Big|X\Big)+5\mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{B_1}(X)\cdot\mathbf{1}_{B_2}(Y)\Big|X\Big) = \\
&= \mathbf{1}_{A_1}(X)\cdot\mathbb{E}(\mathbf{1}_{A_2}(Y))+5\cdot\mathbf{1}_{B_1}(X)\cdot\mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_2}(Y)) = \\
&= \mathbf{1}_{A_1}(X)\cdot\mathbb{P}(Y\in A_2)+5\cdot\mathbf{1}_{B_1}(X)\cdot\mathbb{P}(Y\in B_2) = \\
&= \frac{1}{4}\cdot\mathbf{1}_{A_1}(X)+\frac{5}{2}\cdot\mathbf{1}_{B_1}(X).
\end{aligned}
$$

1.5 uždavinys. *Įrodykite, kad jei* $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}X$*, tai* X *ir* Y *yra nekoreliuoti.*

Sprendimas. Pasinaudosime sąlyginio vidurkio h) ir f) savybėmis. Taigi

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY \mid Y)) = \mathbb{E}(Y\mathbb{E}(X \mid Y)) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

1.6 uždavinys. *Tegul* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y = X^2$*. Įrodykite, kad* X *ir* Y *nekoreliuoti, bet* $\mathbb{E}(Y|X) \neq \mathbb{E}Y$*.*

Sprendimas. Apskaičiuosime koreliaciją tarp X ir Y:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) =&\mathbb{E}(X^3) = 0, \\
\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y =&0\cdot\mathbb{E}(X^2) = 0\cdot 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Gavome, kad šie dydžiai nekoreliuoti. Apskaičiuosime $\mathbb{E}(Y|X)$:

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}(X^2 \mid X) = X^2\cdot\mathbb{E}(1 \mid X) = X^2 = Y.$$

Reikia parodyti, kad $Y \neq \mathbb{E}Y$.

$\mathbb{P}(Y = \mathbb{E}Y) = 0$, nes tikimybė, kad tolydus atsitiktinis dydis įgis bet kurią fiksuotą reikšmę, yra 0. Taigi $Y \neq \mathbb{E}Y$.

1.7 uždavinys. *Tarkime, kad a. d.* Z *įgyja reikšmes* 1 *ir* -1 *su tikimybe* $1/2$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ *ir nepriklauso nuo* Z*. Pažymėkime* $X = ZY$*. Įrodykite, kad* $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}X$*, bet* X *ir* Y *nėra nepriklausomi.*

Sprendimas. Pastebėsime, kad

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(ZY \mid Y) = Y\cdot\mathbb{E}(Z \mid Y) = Y\cdot\mathbb{E}Z = 0 = \mathbb{E}X.$$

Aišku, kad X ir Y nėra nepriklausomi, nes $|X| = |Y|$. $\square$

1.69 apibrėžimas. *Turime tikimybinę erdvę* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ir aibę* $B \in \mathcal{F}$*. Tada a. d.* $\mathbb{E}(\mathbf{1}_B \mid \mathcal{G})$ *žymėsime* $\mathbb{P}(B \mid \mathcal{G})$ *ir vadinsime* ***sąlygine tikimybe*** σ*-algebros* $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$*, atžvilgiu.*

Sąlyginė tikimybė $\mathbb{P}(B \mid \mathcal{G})$ bet kokiai fiksuotai aibei $B \in \mathcal{F}$ yra a. d., tenkinantis šias sąlygas:

$$\begin{array}{ll} a) & \mathbb{P}(B \mid \mathcal{G}) \quad \text{yra } \mathcal{G}\text{-matus a. d.;} \\ b) & \forall A \in \mathcal{G} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbf{1}_A P(B \mid \mathcal{G})\right). \end{array}$$

A. d. $\mathbb{E}(X \mid Y)$ yra $\sigma(Y)$-matus (pagal apibrėžimą), todėl egzistuoja tokia Borelio funkcija $m = m(y)$, apibrėžta ir įgyjanti reikšmes aibėje $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, kad

$$m(Y(\omega)) = \mathbb{E}(X \mid Y)(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Funkciją $m(y) = \mathbb{E}(X \mid Y = y)$ vadinsime a. d. X sąlyginiu vidurkiu įvykio $\{Y = y\}$ atžvilgiu. Tokios funkcijos egzistavimas įrodomas taikant Radono-Nikodimo teoremą.

Įvykio $A \in \mathcal{F}$ sąlygine tikimybe įvykio $\{Y = y\}$ atžvilgiu (žymime $\mathbb{P}(A \mid Y = y)$) vadinsime $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A \mid Y = y)$.

Aišku, kad $\mathbb{P}(A \mid Y = y)$ galima apibrėžti kaip $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-mačią funkciją, tenkinančią lygybę

$$\mathbb{P}(A \cap \{Y \in B\}) = \int_B \mathbb{P}(A \mid Y = y)\, \mathbb{P}_Y(dy), \qquad B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}).$$

1.8 Sąlyginis tankis

1.70 apibrėžimas. *Vektoriaus, sudaryto iš bet kurių skirtingų pradinio a. v. koordinačių, tikimybinį skirstinį vadiname **marginaliuoju**.*

Pavyzdžiui, a. v. $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_k)$ skirstinį vadiname marginaliuoju jungtinio vektoriaus $\mathbf{X} = (Y_1, \ldots, Y_k, Z_1 \ldots, Z_m)$ atžvilgiu.

1.71 apibrėžimas. *Tegul (ξ, η) – dvimatis a. v. su tankio funkcija $f_{\xi,\eta}(x, y)$, o $f_\xi(x)$ ir $f_\eta(y)$ – vienmačiai (marginaliniai) tankiai. Tada a. d. ξ sąlyginiu tankiu, kai $\eta = y$, vadinamas dydis*

$$f_{\xi|\eta}(x \mid y) := \frac{f_{\xi,\eta}(x, y)}{f_\eta(y)}$$

tariant, kad $f_{\xi|\eta}(x \mid y) = 0$, jei $f_\eta(y) = 0$.

Tuomet

$$\mathbb{P}(\xi \in C \mid \eta = y) = \int_C f_{\xi|\eta}(x \mid y)\, dx\,, \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

t. y. $f_{\xi|\eta}(x \mid y)$ yra sąlyginio skirstinio tankis.

Savybės:

$$\begin{array}{ll} a) & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi|\eta}(x \mid y) dx = 1; \\ b) & f_{\xi,\eta}(x, y) = f_{\xi|\eta}(x \mid y) \cdot f_\eta(y). \end{array}$$

Tai formulės $f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$, teisingos nepriklausomų a. d. tankiams, apibendrinimas.

1.72 teorema. *Tarkime, kad pora a. d.* (ξ, η) *turi tankį* $f_{\xi,\eta}(x, y)$. *Jei* $\mathbb{E}|g(\xi)| < \infty$, *tai*

$$\mathbb{E}(g(\xi) \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\xi|\eta}(x \mid y)\, dx. \qquad \square$$

Daugiamačiu atveju turėsime

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \prod_{k=2}^{n} f_{X_k|X_{k-1},\ldots,X_1}(x_k \mid x_{k-1}, \ldots, x_1)\,. \tag{1.3}$$

Tai gauname iš lygybės

$$\begin{aligned} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)}{f_{X_1,\ldots,X_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1})} \cdot \frac{f_{X_1,\ldots,X_{n-1}}(x_1, \ldots, x_{n-1})}{f_{X_1,\ldots,X_{n-2}}(x_1, \ldots, x_{n-2})} \\ &\cdot \ldots \cdot \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} \cdot f_{X_1}(x_1). \end{aligned}$$

2 skyrius

Atsitiktiniai procesai

2.1 Atsitiktinio proceso sąvoka

Duota tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

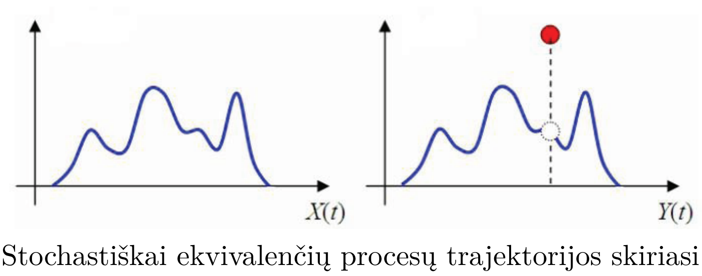
2.1 apibrėžimas. ***Atsitiktinis procesas*** *(toliau – ats. pr.) yra a. d. šeima* $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$*, kur indeksas* t *priklauso indeksų aibei* $\mathbb{T}$*. Paprastai* $\mathbb{T}$ *yra intervalas iš* $\mathbb{R}$ *(šiuo atveju sakome, kad* X *yra* ***tolydaus laiko*** *ats. pr.) arba poaibis* $\mathbb{N}$ *(šiuo atveju sakome, kad* X *yra* ***diskretaus laiko*** *ats. pr.). Atvaizdį* $t \to X(t, \omega)$ *vadinsime atsitiktinio proceso* ***trajektorija*** *arba* ***realizacija****.*

Realiai stebėdami atsitiktinį procesą, stebime vieną iš jo realizacijų.

2.2 apibrėžimas. *Tarkime, kad* $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ *yra realusis ats. pr. ir* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{T}$*, čia* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$*. Tada* n*-mačio atsitiktinio vektoriaus* $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ *skirstinį vadinsime ats. pr.* $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ ***baigtiniamačiu skirstiniu****.*

2.3 apibrėžimas. *Sakysime, kad* ***duotas*** *ats. pr.* $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$*, jei žinomi visi jo baigtiniamačiai skirstiniai visiems baigtiniams rinkiniams* $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset \mathbb{T}$*. Baigtiniamačiai skirstiniai turi tenkinti vadinamasias „suderinamumo sąlygas“.*

2.4 apibrėžimas. *Atsitiktiniai procesai* $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ *ir* $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{T}\}$*, apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje ir įgyjantys reikšmes toje pačioje mačioje erdvėje* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$*, vadinami* ***stochastiškai ekvivalenčiais****, jei* $\mathbb{P}(X(t, \omega) \neq Y(t, \omega)) = 0$ *bet kuriam* $t \in \mathbb{T}$*. (Arba sakome, kad* X *ir* Y *yra vienas kito* ***modifikacija****.)*



Stochastiškai ekvivalenčių procesų trajektorijos skiriasi

Pastebėsime, kad jei X ir Y yra stochastiškai ekvivalentūs, tai jų baigtiniamačiai skirstiniai sutampa. Iš tikrųjų

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n) = \\ &\quad = \mathbb{P}(X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n, X(t_1) = Y(t_1), \dots, X(t_n) = Y(t_n)) = \\ &\quad = \mathbb{P}(Y(t_1) \in B_1, \dots, Y(t_n) \in B_n, X(t_1) = Y(t_1), \dots, X(t_n) = Y(t_n)) = \\ &\quad = \mathbb{P}(Y(t_1) \in B_1, \dots, Y(t_n) \in B_n),\end{aligned}$$

nes

$$\overline{\{X(t_1) = Y(t_1), \dots, X(t_n) = Y(t_n)\}} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X(t_k) \neq Y(t_k)\}.$$

Tačiau nors procesai X ir Y turi tuos pačius skirstinius, bet jų trajektorijos vis dėlto gali skirtis.

Pavyzdys. Tarkime, $\mathbb{T} = [0, 1]$, o a. d. $\tau(\omega)$ turi tolygųjį skirstinį aibėje $\mathbb{T}$, t. y. jo pasiskirstymo funkcija

$$F_\tau(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad x \leq 0, \\ x, & \text{kai} \quad 0 < x < 1, \\ 1, & \text{kai} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Apibrėžkime du procesus

$$X(t, \omega) = 0, \quad t \in T, \quad \text{ir} \quad Y(t, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad t = \tau(\omega), \\ 0, & \text{kai} \quad t \neq \tau(\omega), \end{cases} \quad t \in \mathbb{T}.$$

Šie procesai yra stochastiškai ekvivalentūs, nes kiekvienam $t \in T$

$$\mathbb{P}(X(t, \omega) \neq Y(t, \omega)) = \mathbb{P}(t = \tau(\omega)) = 0.$$

Taip yra todėl, kad tolydaus a. d. tikimybė įgyti fiksuotą reikšmę yra lygi 0. Matome, kad bet kuri X trajektorija yra tolydi ir lygi nuliui, o Y trajektorijos yra trūkios atsitiktiniais laiko momentais.

2.5 apibrėžimas. *Atsitiktiniai procesai* $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ *ir* $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{T}\}$ *vadinami* ***neatskiriamaisiais****, jei b. v. jų trajektorijos sutampa, t. y. jei*

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t) \text{ visiems } t \in \mathbb{T}) = 1.$$

Pavyzdyje apibrėžti procesai X ir Y nėra neatskiriami.

2.6 teiginys. *Tarkime, ats. pr.* $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ *ir* $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{T}\}$ *yra stochastiškai ekvivalentūs ir abu tolydūs iš dešinės. Tada* X *ir* Y *yra neatskiriami.*

2.7 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas* X *su reikšmėmis mačioje erdvėje* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *vadinamas tolydžiuoju, jei b. v.* ω *funkcijos* $t \to X(t, \omega)$ *yra tolydžios.*

2.8 teorema (Kolmogorovo tolydumo)**.** *Tarkime, kad procesas* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *tenkina sąlygą: visiems* $T > 0$ *egzistuoja tokios teigiamos konstantos* α, β, K*, kad*

$$\mathbb{E}|X(t) - X(s)|^{\alpha} \leq K|t-s|^{1+\beta}, \quad 0 \leq s, t \leq T.$$

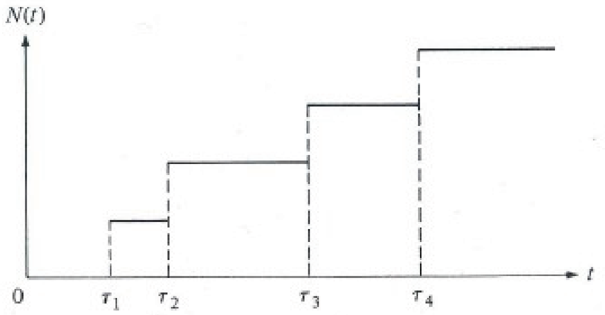
Tuomet egzistuoja tolydi X *modifikacija.*

2.9 apibrėžimas (Tolydumas kvadrato vidurkio prasme)**.** *Atsitiktinis procesas* X *vadinamas tolydžiuoju kvadrato vidurkio prasme taške* t_0*, jei* $\mathbb{E}|X(t) - X(t_0)|^2 \to 0$*, kai* $t \to t_0$*. Atsitiktinis procesas* X *vadinamas tolydžiuoju kvadrato vidurkio prasme, jei jis kvadrato vidurkio prasme tolydus visuose taškuose* t_0*.*

2.10 apibrėžimas (Tolydumas pagal tikimybę arba stochastinis tolydumas)**.** *Atsitiktinis procesas* X *vadinamas stochastiškai tolydžiuoju taške* t_0*, jei* $X(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} X(t_0)$*, kai* $t \to t_0$*, t.y. jei bet kokiam* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to t_0} \mathbb{P}\big(|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon\big) = 0$$

Atsitiktinis procesas X *vadinamas stochastiškai tolydžiuoju , jei jis stochastiškai tolydus visuose taškuose* t_0*.*



Proceso $N(t)$ trajektorija

Pavyzdys. Tarkime, kad $\{\tau_1 \leq \ldots \leq \tau_n\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami a. d. tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ir skirstinys $F(t) = \mathbb{P}(\tau_1 \leq t)$ yra tolydus. Nors kiekviena a. pr. $N(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq t\}}$ trajektorija yra trūki, bet jis yra stochastiškai tolydus intervale $[0, \infty)$. Tai įrodysime. Iš Čebyševo nelygybės išplaukia

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(|N(t+h) - N(t)| > \varepsilon\big) \leq & \varepsilon^{-1}\mathbb{E}|N(t+h) - N(t)| = \varepsilon^{-1}\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{t < \tau_k \leq t+h\}} \\
= & n\varepsilon^{-1}\mathbb{P}(t < \tau_k \leq t+h) = n\varepsilon^{-1}[F(t+h) - F(t)] \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

kai $h \to 0$. Analogiškai, $\mathbb{P}\big(|N(t-h) - N(t)| > \varepsilon\big) \to 0$, kai $h \to 0$.

2.2 Brauno judesys ir jo savybės

2.11 apibrėžimas. *Stochastiniu Brauno judesiu arba* ***standartiniu Vynerio procesu****, prasidedančiu taške* 0*, vadinamas atsitiktinis procesas* $W = \{W(t), t \geq 0\}$*, tenkinantis sąlygas:*

1) $W(0) = 0$;

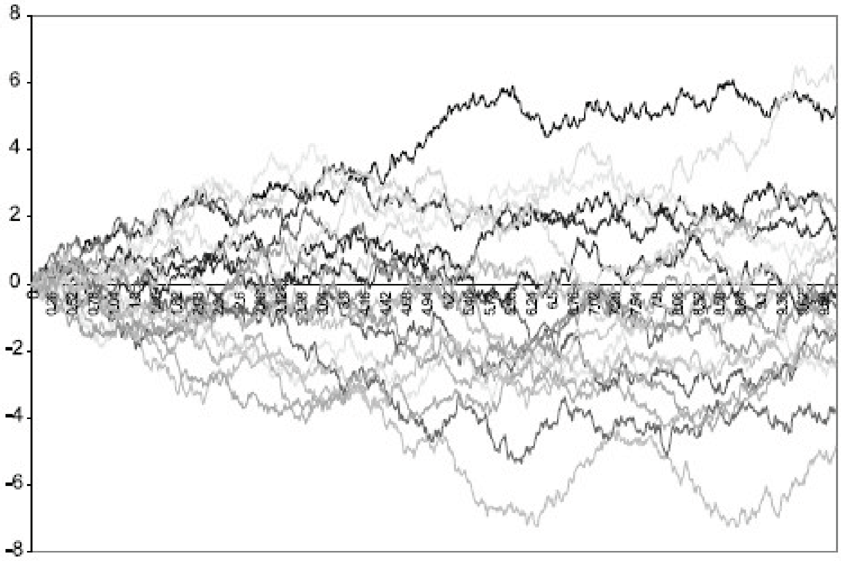
2) bet kokiam rinkiniui $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ *a. d.* $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ *yra nepriklausomi, t. y. Brauno judesio pokyčiai yra nepriklausomi;*

3) a. d. $W(t) - W(s)$, $0 \leq s \leq t$*, skirstinys yra normalusis su vidurkiu* 0 *ir dispersija* $t - s$*, t. y.* $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$*.*

2.12 pastaba. *Brauno judesio trajektorijos yra tolydžios, nes patenkintos Kolmogorovo teoremos sąlygos. Tikrai, iš Vynerio proceso apibrėžimo*

$$\mathbb{E}|W(t) - W(s)|^4 = 3|t - s|^2,$$

nes, kaip žinoma, a. d. $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ *ketvirtas momentas* $\mathbb{E}\xi^4 = 3(\mathbb{E}\xi^2)^2 = 3\sigma^4$*.* □



Brauno judesio trajektorijos

2.1 uždavinys. *Apskaičiuokite* $\mathbb{E}W(t)$ *ir* $\operatorname{cov}(W(t), W(s))$*.*

Sprendimas. Žinome, kad $(W(t) - W(s)) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ ir $W(0) = 0$. Todėl $\mathbb{E}\,(W(t)) = \mathbb{E}\,(W(t) - W(0)) = 0$ ir $\operatorname{cov}(W(t), W(s)) = \mathbb{E}\,(W(t)W(s))$.

Tarkime, $s < t$. Kadangi Brauno judesio pokyčiai yra nepriklausomi, tai

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,(W(t)W(s)) &= \mathbb{E}\,[(W(t) - W(s) + W(s))\,W(s)] = \\ &= \mathbb{E}\left[(W(t) - W(s)) \cdot (W(s) - W(0)) + W^2(s)\right] = \\ &= \mathbb{E}\,(W(t) - W(s)) \cdot \mathbb{E}\,(W(s) - W(0)) + \mathbb{E}W^2(s) = s.\end{aligned}$$

Jeigu $s > t$, tai $\mathbb{E}\,(W(t)W(s)) = t$. Todėl $\operatorname{cov}(W(t), W(s)) = t \wedge s$. □

Tarkime, (t_k^n) yra intervalo $[0, T]$ skaidinys, t. y.

$$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = T.$$

Pažymėkime $\Delta_i^n W = W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)$, čia W – Vynerio procesas.

2.13 teiginys. *Įrodysime, kad*

$$\underset{\Delta^n \to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{m_n-1} (\Delta_k^n W)^2 = T,$$

t. y.

$$\lim_{\Delta^n \to 0} \mathbb{E}\Bigg(\sum_{k=0}^{m_n-1} (\Delta_k^n W)^2 - T\Bigg)^2 = 0,$$

čia

$$\Delta^n = \max_{0 \le k \le m_n - 1} |\, t_{k+1}^n - t_k^n| = \max_{0 \le k \le m_n - 1} |\, \Delta_k^n t|\,, \quad \Delta_k^n t = t_{k+1}^n - t_k^n.$$

Įrodymas. Aišku, kad

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} (\Delta_k^n W)^2 - T = \sum_{k=0}^{m_n-1} \Big((\Delta_k^n W)^2 - \Delta_k^n t\Big).$$

Vynerio proceso pokyčiai $\Delta_k^n W$ yra nepriklausomi a. d. Todėl $(\Delta_k^n W)^2 - \Delta_k^n t$ taip pat yra nepriklausomi a. d. (žr. 1.45 teiginį). Kadangi $\mathbb{E}\big[(\Delta_k^n W)^2 - \Delta_k^n t\big] = 0$, tai

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Bigg(\sum_{k=0}^{m_n-1} \Big((\Delta_k^n W)^2 - \Delta_k^n t\Big)\Bigg)^2 &= \mathbb{D}\Bigg(\sum_{k=0}^{m_n-1} \Big((\Delta_k^n W)^2 - \Delta_k^n t\Big)\Bigg) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbb{D}\Big((\Delta_k^n W)^2 - \Delta_k^n t\Big) = \\
&= \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbb{E}\Big((\Delta_k^n W)^2 - \Delta_k^n t\Big)^2 = \\
&= \sum_{k=0}^{m_n-1} \mathbb{E}\Big((\Delta_k^n W)^4 - 2(\Delta_k^n W)^2(\Delta_k^n t) + (\Delta_k^n t)^2\Big) = \\
&= \sum_{k=0}^{m_n-1} \Big(3(\Delta_k^n t)^2 - 2(\Delta_k^n t)^2 + (\Delta_k^n t)^2\Big) = \\
&= 2\sum_{k=0}^{m_n-1} (\Delta_k^n t)^2 \le 2\Delta^n \sum_{k=0}^{m_n-1} (\Delta_k^n t) = 2T\Delta^n \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

kai $\Delta^n \to 0$. □

2.14 apibrėžimas. *Funkcijos $f : [0,T] \to \mathbb{R}$* ***variacija*** *vadinsime skaičių*

$$v(f;[0,T]) := \sup\Big\{ \sum_{i=0}^{m-1} |\, f(t_{i+1}) - f(t_i)| \Big\},$$

čia tikslusis viršutinis rėžis (supremumas) imamas pagal visus galimus intervalo $[0,T]$ skaidinius $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$, $m \in \mathbb{N}$. Jei $v(f;[0,T]) < +\infty$, tai f vadinama ***baigtinės variacijos funkcija****.*

Pavyzdys. Jei funkcija yra diferencijuojama arba yra Lipšico, tai ji turi baigtinę variaciją. Jei monotoninė – irgi turi baigtinę variaciją.

2.15 išvada. *Vynerio procesas beveik visur (su tikimybe 1) turi begalinę variaciją bet kuriame intervale $[s,t]$.*

Įrodymas. Turime

$$\sum_i |\Delta_i^n W| = \sum_i \frac{(\Delta_i^n W)^2}{|\Delta_i^n W|} \geq \sum_i \frac{(\Delta_i^n W)^2}{\max_j |\Delta_j^n W|} = \frac{1}{\max_j |\Delta_j^n W|} \sum_i (\Delta_i^n W)^2.$$

Iš įrodyto 2.13 teiginio turime, kad $\sum_i (\Delta_i^n W)^2 \xrightarrow{\mathbf{L}^2} (t-s)$, taigi ir $\sum_i (\Delta_i^n W)^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} (t-s)$, kai $n \to \infty$. Pereidami, jei reikia, prie pakankamai greitai smulkėjančio skaidinių sekos $\{t_k^n\}$ posekio, galime laikyti, kad $\sum_i (\Delta_i^n W)^2 \to (t-s)$, kai $n \to \infty$, beveik visur.

Kadangi dėl funkcijos W tolydumo intervale $[s,t]$ turime $\max_j |\Delta_j^n W| \to 0$ (beveik visur), tai

$$\sum_i |\Delta_i^n W| = \sum_i |W(t_{i+1}^n - W(t_i^n)| \to \infty, \quad \text{kai } n \to \infty.$$

Todėl $v(W;[s,t]) = \sup\{\sum_i |\Delta_i^n W|\} = +\infty$, čia supremumas imamas pagal visus intervalo $[s,t]$ skaidinius. □

2.16 teiginys. *Su tikimybe 1 Vynerio proceso $W(t)$ trajektorijos nėra diferencijuojamos nė viename taške $t \geq 0$.*

Įrodymas. Fiksuojame $t \geq 0$. Pastebėsime, kad $W(t+\Delta) - W(t)$ skirstinys sutampa su $\sqrt{\Delta}\, Z$ skirstiniu, čia $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Todėl, bet kokiam $K > 0$ gausime

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{W(t+\Delta) - W(t)}{\Delta}\Big| > K\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{\sqrt{\Delta}\, Z}{\Delta}\Big| > K\Big) = \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{Z}{\sqrt{\Delta}}\Big| > K\Big).$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{Z}{\sqrt{\Delta}}\Big| > K\Big) =&\mathbb{P}(\,|Z| > K\sqrt{\Delta}\,) = 1 - \mathbb{P}(\,|Z| \leq K\sqrt{\Delta}\,) = \\ =&1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-K\sqrt{\Delta}}^{K\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,\end{aligned}$$

o

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K\sqrt{\Delta}}^{K\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leq \frac{2K\sqrt{\Delta}}{\sqrt{2\pi}} \longrightarrow 0, \quad \text{kai} \quad \Delta \to 0. \tag{2.1}$$

Todėl kiekvienam $K > 0$

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{W(t+\Delta)-W(t)}{\Delta}\Big| > K\Big) \longrightarrow 1, \quad \text{kai} \quad \Delta \to 0, \tag{2.2}$$

t. y. kiek norima mažoje taško t aplinkoje a. d. $|\frac{W(t+\Delta)-W(t)}{\Delta}|$ gali būti kiek norima didelis. Pažymėkime

$$A_n = \Big\{\omega : \Big|\frac{W(t+\Delta)-W(t)}{\Delta}\Big| > n, \quad \text{kai} \quad \Delta \in \Big[0, \frac{1}{n^4}\Big]\Big\}.$$

Tada $\mathbb{P}(A_n) \to 1$, kai $n \to \infty$. Tai išplaukia iš (2.1) ir (2.2). Kadangi įvykiai A_n yra mažėjantys, tai

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(W \text{ nediferencijuojama taške } t\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n) = 1.$$

Vadinasi, procesas W negali turėti išvestinės nė viename taške t. □

2.3 Gauso procesas

Daugiamatis Gauso, arba daugiamatis normalusis, skirstinys yra vienas svarbiausių tikimybių teorijoje ir matematinėje statistikoje. Todėl detaliau panagrinėsime jo savybes.

Šiame skyrelyje rašydami $\mathbf{x}^T$ – žymėsime transponuotą vektorių, t. y. vektorių eilutę.

2.17 apibrėžimas. *n-matis a. v. $\mathbf{X}$ yra normalusis tada ir tik tada, kai kiekvienam n-mačiui vektoriui $\mathbf{a}$, vienmatis a. d. $\mathbf{a}^T\mathbf{X}$ yra normalusis. Sutrumpintai žymėsine $X \sim \mathcal{N}(m, A)$. Užrašas $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(m, A)$ naudojamas norint pasakyti, kad $\mathbf{X}$ (daugiamatis) skirstinys yra normalusis, kurio vidurkių vektorius m, o kovariacijų matrica A.*

Naudojantis šiuo apibrėžimu galima gauti tris faktus:
(a) Kiekviena $\mathbf{X}$ komponentė yra normalusis a. d.
(b) $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ yra normalusis a. d.
(c) Kiekvienas marginalusis skirstinys yra normalusis.

Tikrai, tam kad X_k būtų normalusis bet kokiam fiksuotam $k = 1, \ldots, n$, pakanka paimti vektorių $\mathbf{a}$ tokį, kad $a_k = 1$, o likusieji $a_j = 0$. Tam, kad suma visų komponenčių būtų normalusis a. d., pakanka paimti $a_k = 1$ su visais k. Savybė c) bus įrodyta, jei a. v. $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})$ yra normalusis bet kokiam fiksuotam rinkiniui $i_1, \ldots, i_k$, $k = 1, \ldots, n$. Kadangi mes žinome, kad $\mathbf{X}$ yra normalusis, tai žinome, kad $\mathbf{a}^T\mathbf{X}$ yra normalusis bet kokiam $\mathbf{a}$. Atskiru atveju, visiems $\mathbf{a}$ tokiems, kad $a_j = 0$, kai $j \neq i_1, \ldots, i_k$. Tai ir įrodo c).

2.18 apibrėžimas. *A. v.* $\mathbf{X}^T = (X_1, \ldots, X_n)$ *vadinamas Gauso (normalusis), jei jo charakteristinė funkcija turi pavidalą*

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \mathbb{E}\exp\{i\lambda^T X\} = \exp\left\{i\lambda^T m - \frac{1}{2}\left(\lambda^T A\lambda\right)\right\},$$

arba

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \mathbb{E}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k X_k\right\} = \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\lambda_k m_k - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}\right\},$$

čia $\lambda^T = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}\mathbf{X}^T = m^T$, *t. y.* $\mathbb{E}X_k = m_k$ *su visais* $k = 1, \ldots, n$, *ir* $A = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ *– kovariacijų matrica, t. y.* $\sigma_{ij} = \mathbb{E}(X_i - m_i)(X_j - m_j)$.

2.19 teiginys. *Apibrėžimai 2.17 ir 2.18 yra ekvivalentūs.*

2.20 apibrėžimas. *Sakysime, kad* $\mathbf{X}^T$ *turi neišsigimusį Gauso skirstinį, jei matrica* A *yra apverčiama arba antraip, kai* A *yra griežtai teigiamai apibrėžta matrica, t. y.* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij} > 0$, *čia* λ *yra nenulinis vektorius.*

2.21 teiginys. *A. v.* $\mathbf{X}^T$ *su neišsigimusiu Gauso skirstiniu tankis yra*

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{|A^{-1}|}{(2\pi)^n}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m)^T A^{-1}(x-m)\right\}$$

arba

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{|A^{-1}|}{(2\pi)^n}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_i)a_{ij}^{-1}(x_j-m_j)\right\},$$

čia A^{-1} *yra kovariacijų matricos* A *atvirkštinė matrica,* $|A^{-1}| = \det A$.

2.2 uždavinys. *Suraskite matricų* A *ir* A^{-1} *išraiškas dvimačiu atveju.*

Sprendimas.

$$A = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}, \quad \text{čia} \quad \rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix}1/\sigma_1^2 & -\rho/\sigma_1\sigma_2\\ -\rho/\sigma_1\sigma_2 & 1/\sigma_2^2\end{pmatrix}, \quad \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{(1-\rho^2)\,\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

nes

$$a_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j}\frac{\det A_{ji}}{\det A} = (-1)^{i+j}\frac{|A_{ji}|}{|A|},$$

A_{ji} yra matricos elemento a_{ji} minoras. Dydis ρ vadinamas koreliacijos koeficentu ir $|\rho| \leq 1$. Jei $\rho(\xi, \eta) = \pm 1$, tai a. d. ξ ir η yra tiesiškai priklausomi. Dvimačio Gauso skirstinio tankio funkciją galime užrašyti šitaip:

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big\{ - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \\ &\quad -2\rho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

2.3 uždavinys. *Apskaičiuokite normaliojo vektoriaus* (X_1, X_2) *sąlyginį tankį* $f_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1)$.

Sprendimas. Kadangi

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big\{ - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \\ &- 2\rho\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\Big]\Big\} \end{aligned}$$

ir

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{ - \frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\Big\},$$

tai

$$\begin{aligned} f_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1) &= \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \\ &= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ - \frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(x_1-m_1)^2 - \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - 2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-m_1)(x_2-m_2) + (x_2-m_2)^2\right] + \frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \\ &\quad \text{(iškeliame } 1/\sigma_2^2 \text{ ir išskirsime pilną kvadratą)} \\ &= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ - \frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[\Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x_1-m_1) - (x_2-m_2)\Big)^2 + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}(1-\rho^2)(x_1-m_1)^2\right] + \frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ - \frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[\Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x_1-m_1) - (x_2-m_2)\Big)^2\right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_2^2(1-\rho^2)(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} + \frac{(x_1-m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ - \frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[\Big((x_2-m_2) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x_1-m_1)\Big)^2\right]\right\}. \end{aligned}$$

Gautasis sąlyginis tankis atitinka normaliojo a. d. su vidurkiu $m_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x_1 - m_1)$ ir dispersija $\sigma_2^2(1-\rho^2)$ tankiui. Be to,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2 \mid X_1 = x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2\, f_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1)\, dx_2 = m_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x_1 - m_1),\\ \mathbb{D}(X_2 \mid X_1 = x_1) &= \mathbb{E}(X_2^2 \mid X_1 = x_1) - \big(\mathbb{E}(X_2 \mid X_1 = x_1)\big)^2\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 f_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1)\, dx_2 - \big(\mathbb{E}(X_2 \mid X_1 = x_1)\big)^2 = \sigma_2^2(1-\rho^2),\end{aligned}$$

nes

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2\, f_{X_2|X_1}(x_2 \mid x_1)\, dx_2\\ &= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 \exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\Big[\Big((x_2 - m_2) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x_1 - m_1)\Big)^2\Big]\Big\} dx_2\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(y\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x_1 - m_1) + m_2\Big)^2 \exp\Big\{-\frac{y^2}{2}\Big\}\, dy\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2\sigma_2^2(1-\rho^2) \exp\Big\{-\frac{y^2}{2}\Big\}\, dy\\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x_1 - m_1) + m_2\Big)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{y^2}{2}\Big\}\, dy\\ &= \sigma_2^2(1-\rho^2) + \Big(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x_1 - m_1) + m_2\Big)^2.\end{aligned}$$

Darėme pakeitimą

$$y = \frac{(x_2 - m_2) - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x_1 - m_1)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

ir naudojomės lygybėmis

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \exp\Big\{-\frac{y^2}{2}\Big\} dy = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{y^2}{2}\Big\} dy = \sqrt{2\pi}\,.$$

2.4 uždavinys. *Apskaičiuokite normaliojo vektoriaus (X_1, X_2, X_3) su nuliniu vidurkiu sąlyginį tankį $f_{X_3|X_2,X_1}(x_3 \mid x_2, x_1)$.*

Sprendimas. Pažymėkime $A^{-1} = (\widehat{a}_{ij})$. Tada

$$\begin{aligned}f_{X_3|X_2,X_1}(x_3 \mid x_2, x_1) &= \frac{f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)}{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)} = \frac{f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)\, dx_3} =\\ &= \frac{\exp\big\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \widehat{a}_{ij}x_ix_j\big\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\big\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \widehat{a}_{ij}x_ix_j\big\} dx_3}.\end{aligned}$$

Nesunku apskaičiuoti, kad

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\widehat{a}_{ij}x_ix_j &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\widehat{a}_{ij}x_ix_j + 2\widehat{a}_{13}x_1x_3 + 2\widehat{a}_{23}x_2x_3 + \widehat{a}_{33}x_3^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\widehat{a}_{ij}x_ix_j + \widehat{a}_{33}\Big[x_3 + \frac{\widehat{a}_{13}}{\widehat{a}_{33}}\,x_1 + \frac{\widehat{a}_{23}}{\widehat{a}_{33}}\,x_2\Big]^2 - \\
&\quad -\widehat{a}_{33}\Big[\Big(\frac{\widehat{a}_{13}}{\widehat{a}_{33}}\Big)^2 x_1^2 + \Big(\frac{\widehat{a}_{23}}{\widehat{a}_{33}}\Big)^2 x_2^2 + 2\,\frac{\widehat{a}_{13}\widehat{a}_{23}}{\widehat{a}_{33}^2}\,x_1x_2\Big].
\end{aligned}$$

Todėl

$$\begin{aligned}
f_{X_3|\,X_2,X_1}(x_3|\,x_2,x_1) &= \frac{\exp\big\{-\frac{1}{2}\,\widehat{a}_{33}\big[x_3 + \frac{\widehat{a}_{13}}{\widehat{a}_{33}}\,x_1 + \frac{\widehat{a}_{23}}{\widehat{a}_{33}}\,x_2\big]^2\big\}}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\big\{-\frac{1}{2}\,\widehat{a}_{33}\big[x_3 + \frac{\widehat{a}_{13}}{\widehat{a}_{33}}\,x_1 + \frac{\widehat{a}_{23}}{\widehat{a}_{33}}\,x_2\big]^2\big\}dx_3} = \\
&= \sqrt{\frac{\widehat{a}_{33}}{2\pi}}\,\exp\Big\{-\frac{1}{2}\,\widehat{a}_{33}\Big[x_3 + \frac{\widehat{a}_{13}}{\widehat{a}_{33}}\,x_1 + \frac{\widehat{a}_{23}}{\widehat{a}_{33}}\,x_2\Big]^2\Big\}.
\end{aligned}$$

2.22 pastaba. *Nesunku įrodyti, kad*

$$f_{X_n|X_{n-1},\dots,X_1}(x_n \mid x_{n-1},\dots x_1) = \sqrt{\frac{\widehat{a}_{nn}}{2\pi}}\,\exp\Big\{-\frac{1}{2}\,\widehat{a}_{nn}\Big[x_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\widehat{a}_{in}}{\widehat{a}_{nn}}\,x_i\Big]^2\Big\}.$$

2.23 teiginys. *Jei normaliojo vektoriaus* (X,Y) *koordinatės nekoreliuotos, tai jos ir nepriklausomos.*

Įrodysime šį teiginį. Kadangi (X,Y) yra dvimatis normalusis a. v., tai

$$\mathbb{E}\exp\{i\lambda X + i\mu Y\} = \exp\Big\{i\lambda m_1 + i\mu m_2 - \frac{1}{2}\Big[\lambda^2\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\lambda\mu + \mu^2\sigma_2^2\Big]\Big\},$$

čia $m_1 = \mathbb{E}X$, $m_2 = \mathbb{E}Y$, $\sigma_1^2 = \mathbb{D}X$, $\sigma_2^2 = \mathbb{D}Y$, $\rho = cor(X,Y)$ – koreliacija.

Jei X ir Y nekoreliuoti, tai $\rho = 0$ ir

$$\mathbb{E}\exp\{i\lambda X + i\mu Y\} = \mathbb{E}\exp\{i\lambda X\}\cdot\mathbb{E}\exp\{i\mu Y\}. \qquad \Box$$

2.5 uždavinys. *Tarkime, a. d.* Z *įgyja reikšmes* 1 *ir* -1 *su tikimybe* $1/2$, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ *ir nepriklauso nuo* Z. *Pažymėkime* $Y = ZX$. *Įrodykite, kad a. v.* (X,Y) *nėra Gauso, o* X *ir* Y *nėra nepriklausomi.*

Sprendimas. Anksčiau buvo įrodyta, kad jei X ir Y yra nekoreliuoti a. d., tai jie nėra nepriklausomi (žr. 18 psl. pateiktą pavyzdį). Be to, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Jei a. v. (X,Y) būtų Gauso, tai iš 2.23 teiginio išplauktų, kad a. d. X ir Y yra nepriklausomi. Gauname prieštarą. Todėl a. v. (X,Y) nėra Gauso. Taigi nors a. d. X ir Y yra Gauso ir nekoreliuoti, bet a. v. (X,Y) nebūtinai yra Gauso.

Faktą, kad a. v. (X,Y) nėra Gauso, įrodysime kitu būdu, pasinaudoję 2.17 apibrėžimu.

Kadangi

$$\mathbb{P}(X+Y=0)=\mathbb{P}(Z=-1)=\frac{1}{2}\,,$$

tai a. d. $X+Y$ negali būti normalusis. Jei jis būtų normalusis, tai $\mathbb{P}(X+Y=0)$ būtų lygi 0, nes normalusis skirstinys yra absoliučiai tolydus ir tikimybė jam įgyti konkrečią reikšmę lygi 0. Vadinasi, a. v. (X,Y) nėra Gauso. □

2.24 teiginys. *Tarkime, kad seka normaliųjų a. d.* (X_n)*,* $X_n\sim\mathcal{N}(\mu_n,\sigma_n^2)$*, konverguoja* L_2 *prasme į a. d.* X*. Jei* $\mathbb{D}X=\sigma^2>0$*, tai* $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$*.*

Įrodymas. Įrodysime, kad iš konvergavimo $X_n\xrightarrow{\mathbf{L_2}}X$ išplaukia vidurkių μ_n ir dispersijų σ_n^2 konvergavimas į X vidurkį ir dispersiją. Pasinaudosime Koši nelygybe. Turime

$$|\mu_n-\mathbb{E}X|=|\mathbb{E}X_n-\mathbb{E}X|\le\mathbb{E}|X_n-X|\le\sqrt{\mathbb{E}|X_n-X|^2}\longrightarrow 0,\quad \text{kai } n\to\infty,$$

ir

$$|\mathbb{E}X_n^2-\mathbb{E}X^2|\le\mathbb{E}|X_n^2-X^2|\le\sqrt{\mathbb{E}|X_n-X|^2\cdot\mathbb{E}|X_n+X|^2}\longrightarrow 0,\quad \text{kai } n\to\infty,$$

nes $\mathbb{E}|X_n+X|^2\le 2\mathbb{E}|X_n-X|^2+2\mathbb{E}X^2$. Iš konvergavimo L_2 prasme išplaukia a. d. konvergavimas pagal tikimybę. Todėl $\sigma_n^2\to\mathbb{D}X$, $n\to\infty$, ir su visais $\lambda\in\mathbb{R}$ gauname, kad

$$\exp\{i\lambda X_n\}\xrightarrow{\mathbb{P}}\exp\{i\lambda X\}.$$

Kadangi dydžiai aprėžti, t. y. $|\exp\{i\lambda X_n\}|\le 1$, tai galime taikyti 1.64 išvadą. Gausime, kad $\mathbb{E}|\exp\{i\lambda X_n\}-\exp\{i\lambda X\}|\to 0$, kai $n\to\infty$. Todėl

$$\exp\{i\lambda\mu_n-1/2\lambda^2\sigma_n^2\}=\mathbb{E}\exp\{i\lambda X_n\}\longrightarrow\mathbb{E}\exp\{i\lambda X\}$$

Kadangi μ_n ir σ_n^2 konverguoja į μ ir σ^2, kai $n\to\infty$, tai a. d. X charakteristinė funkcija turi pavidalą

$$\exp\{i\lambda\mu-1/2\lambda^2\sigma^2\}.$$

Vadinasi, X yra Gauso a. d. □

Gautąjį teiginį galime apibendrinti.

2.25 teiginys. *Tarkime, n-matis Gauso a. v.* $\mathbf{X}^{(k)}$ *konverguoja* L_2 *prasme į a. v.* $\mathbf{X}$*, t. y.* $\mathbb{E}(X_i-X_i^{(k)})^2\to 0$*, kai* $k\to\infty$*, su visais* $i=1,2,\ldots,n$*. Tada* $\mathbf{X}$ *yra Gauso a. v., kurio parametrai* μ *ir* Σ *yra atitinkamų* $\mathbf{X}^{(k)}$ *parametrų* $\mu^{(k)}$ *ir* $\Sigma^{(k)}$ *ribos.*

Įrodymas. Įrodysime, kad iš konvergavimo L_2 prasme $X^{(k)}$ į X išplaukia vidurkių $\mu^{(k)}$ ir kovariacijų matricų $\Sigma^{(k)}$ konvergavimas į X vidurkį ir kovariacijų matricą. Pasinaudosime akivaizdžia nelygybe

$$|(a+x)(b+y)-ab|\le|ay|+|bx|+|xy|\,.$$

Paimsime $a = X_i$, $b = X_j$, $x = X_i^{(k)} - X_i$ ir $y = X_j^{(k)} - X_j$. Tuomet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_i^{(k)}X_j^{(k)} - X_iX_j| \;&\le\; \mathbb{E}|X_i(X_j^{(k)} - X_j)| + \mathbb{E}|X_j(X_i^{(k)} - X_i)| \\ &\quad + \mathbb{E}|(X_i^{(k)} - X_i)(X_j^{(k)} - X_j)|\,. \end{aligned}$$

Tada iš Koši-Švarco nelygybės gauname

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_i^{(k)}X_j^{(k)} - X_iX_j| \;&\le\; \sqrt{\mathbb{E}|X_i|^2\mathbb{E}|X_j^{(k)} - X_j|^2} + \sqrt{\mathbb{E}|X_j|^2\mathbb{E}|X_i^{(k)} - X_i|^2} \\ &\quad + \sqrt{\mathbb{E}|X_i^{(k)} - X_i|^2\mathbb{E}|X_j^{(k)} - X_j|^2}\,. \end{aligned}$$

Vadinasi, $\mathbb{E}X_i^{(k)}X_j^{(k)} \to \mathbb{E}X_iX_j$. Dar kartą panaudoję Koši-Švarco nelygybę gauname

$$\mathbb{E}|X_i^{(k)} - X_i| \le \sqrt{\mathbb{E}|X_i^{(k)} - X_i|^2}.$$

Iš šios nelygybės išplaukia, kad $\mu_i^{(k)} = \mathbb{E}X_i^{(k)}$ konverguoja į $\mu_i = \mathbb{E}X_i$ su visais $i = 1, \ldots, n$. Taigi

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \mathbb{E}X_i^{(k)}X_j^{(k)} - \mu_i^{(k)}\mu_j^{(k)} \longrightarrow \mathbb{E}X_iX_j - \mu_i\mu_j = \sigma_{ij}.$$

Be to, iš konvergavimo L_2 prasme išplaukia atitinkamų vektorių konvergavimas pagal tikimybę. Todėl su visais $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gauname, kad

$$\exp\left\{i\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i^{(k)}\right\} \xrightarrow{\mathbb{P}} \exp\left\{i\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right\}.$$

Kadangi dydžiai aprėžti, tai galime taikyti 1.64 išvadą. Gausime, kad

$$\exp\left\{i\sum_{j=1}^n \lambda_j\mu_j^{(k)} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}^{(k)}\right\} = \mathbb{E}\exp\left\{i\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i^{(k)}\right\} \longrightarrow \mathbb{E}\exp\left\{i\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i\right\}.$$

Kadangi $\mu_j^{(k)}$ ir $\sigma_{ij}^{(k)}$ konverguoja į μ_j ir σ_{ij}, kai $k \to \infty$, tai X charakteristinė funkcija turi pavidalą

$$\exp\left\{i\sum_{j=1}^n \lambda_j\mu_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}\right\}.$$

Vadinasi, X yra Gauso a. v. $\square$

Savybės. Tegul $\mathbf{X}^T = (X_1, \ldots, X_n)$, $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(m, A)$, tuomet:

a) jei Gauso a. v. $\mathbf{X}$ koordinatės yra nekoreliuotos, tai jo koordinatės yra nepriklausomi a. d.

b) jei Gauso a. v. **X** kovariacijų matrica turi pavidalą

$$\Sigma = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix},$$

čia $A_1, \ldots, A_k$ yra matricos išdėstytos išilgai Σ diagonalės, tai X galima išskaidyti į vektorius $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ taip, kad šie vektoriai būtų nepriklausomi, o $\mathrm{cov}(X^{(i)}, X^{(i)}) = A_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

2.6 uždavinys. *Tarkime, kad* $\mathbf{X} \in\sim \mathcal{N}(0, A)$, *čia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Įrodyti, kad X_1 *ir* (X_2, X_3) *yra nepriklausomi.*

Sprendimas. A. v. (X_1, X_2, X_3) charakteristinė funkcija

$$\mathbb{E}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{3}\lambda_k X_k\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}\Big)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\Big(\lambda_1^2 + \sum_{i=2}^{3}\sum_{j=2}^{3}\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}\Big)\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\exp\{i\lambda_1 X_1\}\mathbb{E}\exp\left\{i\sum_{j=2}^{3}\lambda_j X_j\right\}. \qquad \square$$

c) jeigu $\mathbf{Y} = H\mathbf{X} + b$, tai **Y** skirstinys yra normalusis, $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}\left(Hm + b, HAH^T\right)$, čia H yra $k \times n$ matavimų matrica, b yra k-matis konstantų vektorius. (Po tiesinės a. v. **X** transformacijos a. v. **Y** išlieka normaliuoju).

d) jei $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}(m_i, A_i)$, $1 \le i \le n$, yra nepriklausomi a. v., tai a. v.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} H_i\mathbf{X}_i\right) \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} H_i m_i, \sum_{i=1}^{n}(H_i A_i H_i^T)\right).$$

Čia H_i, $1 \le i \le n$, – konstantų matricos. $\square$

Tarkime, $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(m, A)$. Kadangi A yra neneigiamai apibrėžta kvadratinė matrica, tai egzistuoja ortogonalioji matrica C tokia, kad $C^TAC = D$, čia D yra diagonalioji matrica, kurios elementai λ_1, λ_2,…, λ_n yra matricos A tikrinės reikšmės. (Priminsime, kad skaičius λ yra matricos A tikrinė reikšmė, jei egzistuoja nenulinis vektorius $\mathbf{x}$ toks, kad $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vektorius $\mathbf{x}$ yra matricos A tikrinis vektorius atitinkantis λ.) Matrica C vadinama ortogonaliąja, jei $C^TC = I$, čia I – vienetinė (tapačioji) matrica. Patebėsime, kad $C^{-1} = C^T$ ir $\det C = \pm 1$.

Pavyzdys. Matricos

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$, yra ortogonaliosios.

2.26 teorema. *Tarkime,* $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(m, A)$ *ir pažymėkime* $\mathbf{Y} = C^T\mathbf{X}$*, čia ortogonalioji matrica* C *tokia, kad* $C^T AC = D$*. Tuomet* $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(C^T m, D)$*. Be to, a. v.* $\mathbf{Y}$ *komponentės yra nepriklausomi a. d. ir jų dispersijos lygios* λ_k*,* $k = 1, 2, \dots, n$*, čia* λ_1*,* λ_2*, …,* λ_n *yra matricos* A *tikrinės reikšmės.*

2.27 pastaba. *Atskiru atveju, gali taip atsitikti, kad kelios tikrinės reikšmės yra lygios nuliui. Šiuo atveju atitinkamos komponentės yra išsigimusios.*

2.28 teorema. *Tarkime,* $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2\mathbf{I})$*, čia* $\sigma^2 > 0$*,* $\mathbf{I}$ *– vienetinė matrica. Pažymėkime* $\mathbf{Y} = C\mathbf{X}$*, čia* C *kokia nors ortogonalioji matrica. Tada* $\mathbf{Y} \in \mathcal{N}(Cm, \sigma^2\mathbf{I})$*. Gauname, kad* $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ *yra nepriklausomi normalieji a. d. su ta pačia dispersija* σ^2*.*

1 pavyzdys. Tarkime, X ir Y yra nepriklausomi, standartiniai normalieji a. d. $\mathcal{N}(0, 1)$. Įrodyti, kad a. d. $X + Y$ ir $X - Y$ yra nepriklausomi.

Sprendimas. Pakanka įrodyti, kad a. d. $U = (X + Y)/\sqrt{2}$ ir $V = (X - Y)/\sqrt{2}$ yra nepriklausomi. Turime, kad $(X, Y)^T \in \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$ ir

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \qquad \text{čia} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Išvada tiesiogiai gausime iš 2.28 teoremos. □

Egzistuoja tiesinės transformacijos, kurios nėra ortogonaliosios, bet po transformacijos a. v. koordinatės tampa nepriklausomais a. d.

2 pavyzdys. Tarkime, $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(m, A)$

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

(Matricos apibrėžime maudojami pažymėjimai yra pateikti 2.2 uždavinyje). Po transformacijos $\mathbf{X} = m + B\mathbf{Y}$ gauname, kad $Y \sim \mathcal{N}(0, I)$. Matrica

$$B = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sigma_2\sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}$$

nėra ortogonalioji.

2.29 apibrėžimas. *Procesas* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *vadinamas* ***Gauso****, jei jo baigtiniamačiai skirstiniai yra normalieji, t. y. su visais* $0 \leq t_1 < \ldots < t_k$*,* $k \in \mathbb{N}$*, a. v.* $(X(t_1), \dots, X(t_k))$ *skirstinys yra normalusis.*

2.30 pastaba. *Visos Gauso proceso skirstinio savybės yra nusakomos* $\mu(t) = \mathbb{E}X_t$ (*vadinama proceso vidurkiu*) *ir* $\rho(t,s) = \mathbb{E}X_tX_s$ (*vadinama proceso autokoreliacine funkcija*).

2.7 uždavinys. *Įrodyti, kad Brauno judesys* W *yra Gauso procesas.*

Sprendimas. Tarkime, kad $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k$. Kadangi Brauno judesys yra procesas su nepriklausomais pokyčiais, tai atsitiktinis dydis

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i W(t_i) = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \ldots + \lambda_k)\big(W(t_i) - W(t_{i-1})\big), \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le k,$$

yra suma nepriklausomų a. d.

$$(\lambda_i + \ldots + \lambda_k)\big(W(t_i) - W(t_{i-1})\big) \sim \mathcal{N}\big(0, (\lambda_i + \ldots + \lambda_k)^2(t_i - t_{i-1})\big).$$

Todėl $\sum_{i=1}^k \lambda_i W(t_i)$ yra normalusis a. d. (žiūr. d) savybę). Prisiminkime, kad Gauso procesą pilnai nusako jo vidurkis ir kovariacinė matrica. A. v. $(W(t_1), \ldots, W(t_k))$ vidurkis yra nulis, o kovariacinė matrica

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \ldots & \sigma_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_k \end{pmatrix}.$$

Be to, a. v. $(W(t_1), \ldots, W(t_k))$ charaktetristinei funkcijai teisinga lygybė

$$\varphi_{W(t_1),\ldots,W(t_k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \prod_{i=1}^n \varphi_{W(t_i)-W(t_{i-1})}(\lambda_i + \ldots + \lambda_k).$$

Todėl

$$\begin{aligned} \varphi_{W(t_1),\ldots,W(t_k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) &= \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k (\lambda_i + \ldots + \lambda_k)^2 (t_i - t_{i-1}) \Big\} \\ &= \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big(\lambda^T A \lambda\Big) \Big\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.4 Stacionarūs procesai

2.31 apibrėžimas. *Procesą* $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ *vadiname stacionariuoju siaurąja prasme (griežtai stacionariu), jei jo baigtiniamačiai skirstiniai nepriklauso nuo laiko postūmio. Tai reiškia, kad su visais* $t_k \in \mathbb{T}$ *ir* $t_k + \tau \in \mathbb{T}$, $k = 1, \ldots, n$, n*-matei pasiskirstymo funkcijai* F *teisinga lygybė*

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X(t_1+\tau),\ldots,X(t_n+\tau)}(x_1, \ldots, x_n).$$

2.32 apibrėžimas. *Procesą $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ vadiname stacionariuoju plačiąja prasme, jei*

$$\mathbb{E}X(t) \equiv m, \qquad \mathbb{D}X(t) \equiv \sigma^2, \qquad \operatorname{cov}(X(t), X(t+\tau)) = R(\tau),$$

t. y. jei vidurkis ir dispersija yra pastovūs, o kovariacija yra funkcija nuo argumentų skirtumo.

2.33 pastaba. *Stacionarumui plačiąja prasme pakanka, kad būtų pastovus vidurkis, o kovariacija būtų funkcija nuo argumentų skirtumo.*

2.8 uždavinys. *Tarkime, kad a.d. X_1 ir X_2 yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę a.d. įgyjantys reikšmes -1 ir 1 su tikimybe $1/2$. Nagrinėkime procesą $Y(t) = X_1 \cos\lambda t + X_2 \sin\lambda t$, $-\infty < t < \infty$, čia λ – neatsitiktinis parametras. Procesas Y yra stacionarusis plačiąja prasme, bet nėra stacionarusis siaurąja prasme.*

Sprendimas. Kadangi a. d. X_1 ir X_2 vidurkiai lygūs nuliui, tai ir proceso $Y = \{Y(t), -\infty < t < \infty\}$ vidurkis nulis. Kadangi a. d. nepriklausomi, o $\mathbb{D}X_1 = \mathbb{D}X_2 = 1$, tai

$$\mathbb{E}Y(t)Y(s) = \mathbb{E}\big(X_1^2 \cos\lambda t \cos\lambda s + X_2^2 \sin\lambda t \sin\lambda s\big) = \cos\lambda(t-s).$$

Vadinasi, procesas Y yra stacionarusis plačiąja prasme.

Įrodysime, kad procesas Y nėra stacionarus siaurąja prasme. Fiksuojame laiko momentus $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ir $t_1 + \tau < t_2 + \tau < \cdots < t_n + \tau$. Skaičiuosime charakteristines funkcijas. Kadangi a. d. X_1 ir X_2 yra nepriklausomi, tai

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k Y(t_k)} &= \mathbb{E}\, e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(\cos\lambda t_k + \sin\lambda t_k)} \mathbf{1}_{\{X_1=1, X_2=1\}} + \\
&\quad + \mathbb{E}\, e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(\cos\lambda t_k - \sin\lambda t_k)} \mathbf{1}_{\{X_1=1, X_2=-1\}} + \\
&\quad + \mathbb{E}\, e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(-\cos\lambda t_k + \sin\lambda t_k)} \mathbf{1}_{\{X_1=-1, X_2=1\}} + \\
&\quad + \mathbb{E}\, e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(-\cos\lambda t_k - \sin\lambda t_k)} \mathbf{1}_{\{X_1=-1, X_2=-1\}} = \\
&= \frac{1}{4}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(\cos\lambda t_k + \sin\lambda t_k)} + e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(\cos\lambda t_k - \sin\lambda t_k)} + \\
&\quad + e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(-\cos\lambda t_k + \sin\lambda t_k)} + e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(-\cos\lambda t_k - \sin\lambda t_k)}\Big)
\end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned}
\cos\lambda t_k + \sin\lambda t_k &= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\Big(\frac{\pi}{4} - \lambda t_k\Big), \quad \cos\lambda t_k - \sin\lambda t_k = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\Big(\frac{\pi}{4} + \lambda t_k\Big), \\
-\cos\lambda t_k + \sin\lambda t_k &= -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\Big(\frac{\pi}{4} - \lambda t_k\Big), \quad -\cos\lambda t_k - \sin\lambda t_k = -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\Big(\frac{\pi}{4} + \lambda t_k\Big).
\end{aligned}$$

Analogiškai

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k Y(t_k+\tau)} &= \frac{1}{4}\Big(e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(\cos\lambda(t_k+\tau) + \sin\lambda(t_k+\tau))} + e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(\cos\lambda(t_k+\tau) - \sin\lambda(t_k+\tau))} + \\
&\quad + e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(-\cos\lambda(t_k+\tau) + \sin\lambda(t_k+\tau))} + e^{i\sum_{k=1}^n \mu_k(-\cos\lambda(t_k+\tau) - \sin\lambda(t_k+\tau))}\Big)
\end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned}
\cos\lambda(t_k+\tau)+\sin\lambda(t_k+\tau) =& 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\Big(\frac{\pi}{4}-\lambda(t_k+\tau)\Big),\\
\cos\lambda(t_k+\tau)-\sin\lambda(t_k+\tau) =& 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\Big(\frac{\pi}{4}+\lambda(t_k+\tau)\Big),\\
-\cos\lambda(t_k+\tau)+\sin\lambda(t_k+\tau) =& -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\Big(\frac{\pi}{4}-\lambda(t_k+\tau)\Big),\\
-\cos\lambda(t_k+\tau)-\sin\lambda(t_k+\tau) =& -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\Big(\frac{\pi}{4}+\lambda(t_k+\tau)\Big).
\end{aligned}$$

Jei procesas stacionarus siaurąja prasme, tai turi sutapti charakteristinės funkcijos. Iš gautų išraiškų matome, kad jos nesutampa. Pavyzdžiui, imame, kad $k = 1$, $t_1 = 0$ ir $\tau = \frac{\pi}{4\lambda}$, tarus, kad $\lambda \neq 0$. (Jei $\lambda = 0$, tai imame $\tau = \frac{\pi}{4}$). Gausime, kad $\cos(\pi/4 - \lambda\pi/(4\lambda)) = 1$, o $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Vadinasi, procesas Y nėra stacionarus siaurąja prasme. □

Jei egzistuoja $\mathbb{D}X(t) < \infty$ visiems $t \in \mathbb{T}$, tai stacionarus siaurąja prasme procesas yra stacionarus ir plačiąja prasme. Tai išplaukia iš apibrėžimo. Gauso procesui abi sąvokos sutampa.

2.4.1 Pirmosios eilės autoregresijos procesas ($AR(1)$ modelis)

Atsitiktinė seka $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ yra vadinama pirmosios eilės autoregresijos procesu arba $AR(1)$, jeigu

$$X_n = \theta X_{n-1} + \varepsilon_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.4}$$

čia θ yra nežinomas parametras ir $\varepsilon = \{\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – seka a. d. su žinomu skirstiniu, kurį galime traktuoti kaip „atsitiktinį triukšmą“. Tarkime, kad

$$\mathbb{E}\varepsilon_i \equiv 0, \qquad \mathbb{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j) = \begin{cases}\sigma^2, & \text{jei} \quad i = j,\\ 0, & \text{jei} \quad i \neq j.\end{cases} \tag{2.5}$$

2.34 pastaba. *$AR(1)$ modeliai gali būti taikomi konstruojant tikimybinius modelius hidrologijoje. Tarkime, nagrinėjamas didelis vandens baseinas (pvz. jūra). $AR(1)$ tikimybiniu modeliu galime aprašyti vandens lygio nuo vidutinės reikšmės kitimus, kurie atsiranda dėl vandens garavimo ir vandens išteklių kitimo šiame baseine.*

Išskleidus X_n, turime

$$\begin{aligned}
X_n &= \theta^2 X_{n-2} + \theta\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n = \\
&= \varepsilon_n + \theta\varepsilon_{n-1} + \ldots + \theta^j\varepsilon_{n-j} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\theta^i\varepsilon_{n-i}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Įrodysime, kad

$$\mathbb{E}X_n \equiv 0, \qquad \mathbb{D}X_n = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}, \quad \text{jei} \quad |\theta| < 1.$$

Kadangi $(\sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i})^2 \geq 0$, tai iš Fatu lemos gauname, kad

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_n^2 &= \mathbb{E}\liminf_m\Big(\sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big)^2 \leq \liminf_m \mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big)^2 = \\ &= \liminf_m \sum_{i=0}^{m}\theta^{2i}\mathbb{E}\varepsilon_{n-i}^2 \leq \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\,.\end{aligned}$$

Todėl

$$\mathbb{E}\Big(X_n - \sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big)^2 = \theta^{2m+2}\mathbb{E}X_{n-m-1}^2 \longrightarrow 0, \qquad \text{kai } m\to\infty,$$

ir iš Koši-Švarco nelygybės gauname, kad

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}X_n^2 - \mathbb{E}\Big(\sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big)^2\Big| &\leq \sqrt{\mathbb{E}\Big(X_n - \sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big)^2\,\mathbb{E}\Big(X_n + \sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big)^2} \\ &\leq \frac{2\sigma^2}{1-\theta^2}\sqrt{\mathbb{E}\Big(X_n - \sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big)^2} \longrightarrow 0, \qquad \text{kai } m\to\infty.\end{aligned}$$

Todėl $\mathbb{E}X_n^2 = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}$, nes $\mathbb{E}(\sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i})^2 = \sigma^2\,\frac{1-\theta^{2m}}{1-\theta^2}$. Vidurkis $\mathbb{E}X_n \equiv 0$, nes

$$\Big|\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}\sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big| \leq \sqrt{\mathbb{E}\Big(X_n - \sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big)^2} \longrightarrow 0, \qquad \text{kai } m\to\infty,$$

ir $\mathbb{E}\sum_{i=0}^{m}\theta^i\varepsilon_{n-i} = 0$. Vadinasi, $\mathbb{D}X_n = \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}$.

Skaičiuojame kovariaciją. Pastebėsime, kad

$$\begin{aligned}X_iX_{i-j} &= \big[(\varepsilon_i + \theta\varepsilon_{i-1} + \cdots + \theta^{j-1}\varepsilon_{i-(j-1)}) + \theta^j(\varepsilon_{i-j} + \theta\varepsilon_{i-j-1} + \cdots)\big] \times \\ &\quad \times(\varepsilon_{i-j} + \theta\varepsilon_{i-j-1} + \cdots).\end{aligned}$$

Iš a. d. (ε_k) nekoreliuotumo gauname a. d. $(\varepsilon_i + \theta\varepsilon_{i-1} + \cdots + \theta^{j-1}\varepsilon_{i-(j-1)})$ ir $(\varepsilon_{i-j} + \theta\varepsilon_{i-j-1} + \cdots)$ nekoreliuotumą. Todėl

$$\mathrm{cov}(X_i, X_{i-j}) = \mathbb{E}(X_iX_{i-j}) = \mathbb{E}\big[\theta^j(\varepsilon_{i-j} + \theta\varepsilon_{i-j-1} + \cdots)^2\big] = \theta^j\mathbb{E}X_{i-j}^2 = \theta^j\,\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\,.$$

Kadangi vidurkis tapatingai lygus nuliui, o kovariacija priklauso tik nuo argumentų skirtumo, tai atsitiktinė seka $X = \{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ yra stacionari.

Nagrinėkime $AR(1)$ modelį, kai $n\in\{0,1,\ldots\}$. Tada

$$X_n = \theta^nX_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\theta^i\varepsilon_{n-i}.$$

Ši išraiška yra tiesinė funkcija nuo X_0 ir triukšmo $\{\varepsilon_k, k=0,1,\ldots\}$. Todėl

$$\mathbb{E}X_n = \theta^n\mathbb{E}X_0$$

ir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_nX_{n+j} &= \mathbb{E}\Big[\Big(\theta^n X_0+\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big)\Big(\theta^{n+j}X_0+\sum_{i=0}^{n+j-1}\theta^i\varepsilon_{n+j-i}\Big)\Big]= \\
&= \theta^{2n+j}\mathbb{E}X_0^2+\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i\varepsilon_{n-i}\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n+j-1}\theta^i\varepsilon_{n+j-i}\Big)\Big] \\
&= \theta^{2n+j}\mathbb{E}X_0^2+\sigma^2\big(\theta^j+\theta^{j+2}+\cdots+\theta^{j+2(n-1)}\big)= \\
&= \theta^{2n+j}\mathbb{E}X_0^2+\sigma^2\theta^j\frac{1-\theta^{2n}}{1-\theta^2},\qquad j\ge 0,
\end{aligned}$$

jei X_0 ir (ε_k) yra nepriklausomi. Vadinasi, ši seka nėra stacionari net jei $X_0=0$. Tam, kad $X=\{X_n, n=0,1,\dots\}$ būtų stacionari, reikia papildomų sąlygų. Pavyzdžiui, jei $X_0=\varepsilon_0$ ir

$$\mathbb{E}\varepsilon_0^2=\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\,,$$

tai

$$\mathbb{E}X_nX_{n+j}=\theta^j\,\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\,.$$

2.4.2 Gauso procesas

2.35 teiginys. *Realusis Gauso procesas* $\{X(t), t\ge 0\}$ *su nuliniu vidurkiu ir kovariacija* $K(s,t)$ *yra griežtai stacionarus (stacionarus siaurąja prasme) tada ir tik tada jei bet kokiems* $0\le s\le t$

$$K(s,t)=K(0,t-s)=R(t-s). \tag{2.7}$$

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime X yra stacionarus siaurąja prasme. Tuomet

$$\mathbb{E}X(s)X(t)=\mathbb{E}X(s+\tau)X(t+\tau)\ \text{arba}\ K(s,t)=K(s+\tau,t+\tau).$$

Imdami $\tau=-s$ mes gausime

$$K(s,t)=K(0,t-s)=R(t-s).$$

Pakankamumas. Jei galioja (2.7), tai vektoriaus $(X(t_1),\dots,X(t_n))$, $0\le t_1<\dots<t_n$, charakteristinė funkcija

$$f(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\lambda_i\lambda_jR(t_i-t_j)\Big\}.$$

Tačiau ji yra ir vektoriaus $(X(t_1+\tau),\dots,X(t_n+\tau))$ charakteristinė funkcija (žiūr. (2.7)). □

2.36 išvada. *Plačiąja prasme stacionarus Gauso procesas su nuliniu vidurkiu yra taip pat stacionarus siaurąja prasme.*

Įrodymas. Tai seka iš stacionaraus proceso plačiąja prasme apibrėžimo.

Pavyzdys. Tarkime $\{W_t, t \geq 0\}$ yra Vynerio procesas. Įrodyti, kad procesas $X_t = e^{-t}W(e^{2t})$, $-\infty < t < \infty$, yra stacionarus procesas plačiąja prasme.

Sprendimas. Pasinaudojus Vynerio proceso savybėmis gauname, kad

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X_t &= e^{-t}\mathbb{E}W(e^{2t}) = 0; \\
K(s,t) &= \mathbb{E}(X_s \cdot X_t) = e^{-s} \cdot e^{-t}\mathbb{E}[W(e^{2s}) \cdot W(e^{2t})] = e^{-s} \cdot e^{-t}(e^{2s} \wedge e^{2t}) = \\
&= e^{s-t} \wedge e^{t-s} = e^{-|t-s|}.
\end{aligned}$$

Matome, kad nagrinėjamo proceso X vidurkis yra nulis, o kovariacija yra funkcija nuo argumentų skirtumo. Vadinasi, procesas X yra stacionarus procesas plačiąja prasme.

2.5 Markovo grandinės

Prie paprasčiausių procesų priskiriamos vadinamosios Markovo grandinės. Nagrinėsime atsitiktinį procesą $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$, apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ir įgyjantį reikšmes iš mačios erdvės $(E, \mathcal{E})$. Laikysime $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots\}$, o būsenų erdvę E – baigtine, arba skaičia. Būsenas žymėsime tiesiog natūraliaisiais skaičiais. Sakysime, kad procesas yra *Markovo grandinė* (tiksliau – *diskrečiojo laiko Markovo grandinė*), jei bet kuriam natūraliajam skaičiui n ir bet kuriems $k, j_0, j_1, \ldots, j_{n-2}, j \in E$ teisingos lygybės

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(X(n) = k \mid X(0) = j_0, X(1) = j_1, \ldots, X(n-2) = j_{n-2}, X(n-1) = j\big) \\
&\quad = \mathbb{P}\big(X(n) = k \mid X(n-1) = j\big).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

(2.8) lygybės dešinėje esančią tikimybę vadinsime *perėjimo iš j-osios būsenos į k-ąją būseną momentu n tikimybe* ir žymėsime $p_{jk}^{(n)}$. Matrica

$$\pi^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \ldots \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

vadinama *perėjimo matrica.* Aišku,

$$\sum_k p_{jk}^{(n)} = 1,$$

kai sumuojama pagal visas galimas būsenas. Pažymėsime

$$\mathbb{P}(X(0) = k) = p_k^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Šios tikimybės vadinamos pradinėmis tikimybėmis. Ir čia

$$\sum_k p_k^0 = 1.$$

Markovo grandinė vadinama *homogenine*, jei tikimybės $p_{jk}^{(n)} = p_{jk}$ nepriklauso nuo n. Jei būsenų skaičius yra baigtinis, tai grandinė vadinama baigtine; jei būsenų aibė skaiti, tai ir grandinė vadinama skaičia.

1 pavyzdys. Tarkime, kad turime seką dėžių, kuriose yra po 1 baltą ir 1 juodą rutulį. Sunumeruokime dėžes skaičiais $0, 1, 2, \ldots$ Atsitiktinai imkime rutulį iš nulinės dėžės ir permeskime į pirmąją. Iš pirmosios dėžės vėl atsitiktinai imkime rutulį ir įmeskime į antrąją. Taip darykime ir toliau. Tikimybė ištraukti apibrėžtos spalvos rutulį iš n-osios dėžės ($n \geq 1$) priklauso tik nuo to, kokios spalvos rutulys buvo ištrauktas iš $(n-1)$-osios dėžės, ir nesikeičia nuo papildomos informacijos, kas įvyko anksčiau. Apibrėžkime a. d. $X(n)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), laikydami $X(n) = b$, jei iš n-osios dėžės buvo ištrauktas baltas rutulys, ir $X(n) = j$, jei iš tos dėžės buvo ištrauktas juodas rutulys. Tada

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X(0) = b) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X(0) = j) = \frac{1}{2},\\
&\mathbb{P}(X(n) = b \mid X(n-1) = b) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X(n) = b \mid X(n-1) = j) = \frac{1}{3},\\
&\mathbb{P}(X(n) = j \mid X(n-1) = b) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X(n) = j \mid X(n-1) = j) = \frac{2}{3}\\
&(n = 1, 2, 3, \ldots).
\end{aligned}$$

Turime baigtinę homogeninę Markovo grandinę su dviem būsenomis, su pradinėmis tikimybėmis $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ir perėjimo matrica

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2 pavyzdys. Tarkime, kad (ξ_n), $n \geq 1$,yra seka nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių a. d., kurie įgyja neneigiamas reikšmes. Sakykime, $\mathbb{P}(\xi = i) = a_i$, $a_i \geq 0$ ir $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$. Pažymėkime $S_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i$, $S_0 = 0$. Įrodysime, kad seka (S_n), $n \geq 0$, yra Markovo grandinė su skaičia būsenų aibe.

Iš tiesų,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_{k+1} = j \mid S_k = i_k, S_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, S_0 = 0)\\
&\quad = \mathbb{P}(S_k + \xi_{k+1} = j \mid S_k = i_k, S_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, S_0 = 0)\\
&\quad = \frac{\mathbb{P}(S_k + \xi_{k+1} = j, S_k = i_k, S_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, S_0 = 0)}{\mathbb{P}(S_k = i_k, S_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, S_0 = 0)}\\
&\quad = \frac{\mathbb{P}(\xi_{k+1} = j - i_k, S_k = i_k, S_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, S_0 = 0)}{\mathbb{P}(S_k = i_k, S_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, S_0 = 0)}\\
&\quad = \frac{\mathbb{P}(\xi_{k+1} = j - i_k) \cdot \mathbb{P}(S_k = i_k, S_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, S_0 = 0)}{\mathbb{P}(S_k = i_k, S_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, S_0 = 0)}\\
&\quad\quad \text{nes } S_j, j \leq k, \text{ ir } \xi_{k+1} \text{ yra nepriklausomi a. d.}\\
&\quad = \mathbb{P}(\xi_{k+1} = j - i_k).
\end{aligned}$$

Panašiai skaičiuodami gausime

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{k+1} = j \mid S_k = i_k) &= \mathbb{P}(S_k + \xi_{k+1} = j \mid S_k = i_k) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{k+1} = j - i_k \mid S_k = i_k) = \mathbb{P}(\xi_{k+1} = j - i_k).\end{aligned}$$

3 pavyzdys. (Uždavinys apie žaidėjo bankrotą). Tarkime, kad žaidėjas A turi kapitalą a, o žaidėjas B kapitalą – b. Be to, tarkime, kad žaidėjas A su tikimybe p išlošia partiją prieš žaidėją B ir padidina savo kapitalą vienetu, o su tikimybe $q = 1-p$ pralošia partiją prieš žaidėją B ir sumažina savo kapitalą vienetu. Tarkime, S_n yra žaidėjo A kapitalo dydis po n partijų. S_n gali įgyti tik baigtinį skaičių reikšmių, t.y. S_n gali įgyti reikšmes $0, 1, \ldots, a+b$. Skirtumas $a+b-S_n$ yra interpretuojamas kaip žaidėjo B kapitalas po n partijų. Jei $S_n = 0$, tai n-tojoje partijoje žaidėjas A bankrutavo, o jei $S_n = a + b$, tai n-tojoje partijoje žaidėjas B bankrutavo.

Šį žaidimą galima aprašyti formaliai. Tarkime, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ yra nepriklausomi Bernulio a. d. tokie, kad $\mathbb{P}(\eta_k = 1) = p$ ir $\mathbb{P}(\eta_k = -1) = q$, $S_0 = a$, $S_k = a + \eta_1 + \ldots + \eta_k$. Čia S_k interpretuojame kaip žaidėjo A kapitalo dydį po k partijų. Seka a. d. $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$ yra Markovo grandinė su $p^0 = \mathbb{P}(S_0 = a) = 1$, $p_{i,j} = \mathbb{P}(S_{k+1} = j \mid S_k = i)$ ir $p(i, i+1) = p$, $p(i, i-1) = q$, kai $0 < i < a+b$, $p(a+b, a+b) = 1$, $p(0, 0) = 1$.

Tarkime, žaidėjas A turi 3 Lt, žaidėjas B – 2 Lt. Tada perėjimo tikimybių matrica atrodys taip:

$$\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} & p_{05} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \\ p_{50} & p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Nagrinėsime homogeninę grandinę su perėjimo matrica $\pi = \|p_{ij}\|$ ir skaičia būsenų aibe. Ši matrica nusako sistemos būsenos pasikeitimą po vieno žingsnio, tiksliau kalbant, nusako tikimybes sistemai patekti į kurią nors k-ąją būseną m-uoju laiko momentu, jei $(m-1)$-uoju laiko momentu ji buvo kurioje nors j-ojoje būsenoje. Apskaičiuosime tikimybę pereiti iš i-osios būsenos į k-ąją būseną per n žingsnių. Pažymėkime tą tikimybę

$$p_{jk}(n) = \mathbb{P}(X(n) = k \mid X(0) = j),$$

jų matricą $\pi(n) = \|p_{jk}(n)\|$.

Pastebėsime, kad

$$\{X(n_1 + n_2) = j\} = \bigcup_i \{X(n_1 + n_2) = j, X(n_1) = i\}$$

ir

$$\begin{aligned}p_{kj}(n_1 + n_2) &= \mathbb{P}(X(n_1 + n_2) = j \mid X(0) = k) = \\ &= \sum_i \mathbb{P}(X(n_1 + n_2) = j, X(n_1) = i \mid X(0) = k),\end{aligned}$$

čia sumuojame pagal visas būsenas. Toliau

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X(n_1+n_2)=j, X(n_1)=i \mid X(0)=k) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(X(n_1+n_2)=j, X(n_1)=i, X(0)=k)}{\mathbb{P}(X(0)=k)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(X(n_1+n_2)=j, X(n_1)=i, X(0)=k)}{\mathbb{P}(X(n_1)=i, X(0)=k)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X(n_1)=i, X(0)=k)}{\mathbb{P}(X(0)=k)} = \\
&= \mathbb{P}(X(n_1+n_2)=j \mid X(n_1)=i, X(0)=k) \cdot \mathbb{P}(X(n_1)=i \mid X(0)=k) = \\
&\quad \text{(iš Markovo savybės ir homogeniškumo)} \\
&= \mathbb{P}(X(n_1+n_2)=j \mid X(n_1)=i) \cdot \mathbb{P}(X(n_1)=i \mid X(0)=k) = \\
&= \mathbb{P}(X(n_2)=j \mid X(0)=i) \cdot \mathbb{P}(X(n_1)=i \mid X(0)=k) = \\
&= p_{ij}(n_2) \cdot p_{ki}(n_1) = p_{ki}(n_1) \cdot p_{ij}(n_2).
\end{aligned}
$$

Todėl

$$p_{kj}(n_1+n_2) = \sum_i p_{ki}(n_1) \cdot p_{ij}(n_2). \tag{2.9}$$

Jei turime kvadratines matricas $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, tai matricų sandaugos $C = A \cdot B$ elementas $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Todėl

$$\pi(n_1+n_2) = \pi(n_1) \cdot \pi(n_2).$$

Taigi

$$\pi(2) = \pi^2(1) = \pi^2,\ \pi(3) = \pi(2) \cdot \pi(1) = \pi^3,\ \ldots$$

Vadinasi, $\pi(n) = \pi^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Formulė (2.9) teisinga ir tada, kai $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, jei laikome

$$p_{kj}(0) = \begin{cases} 1, & \text{kai } k = j, \\ 0, & \text{kai } k \neq j. \end{cases}$$

(2.9) formulė vadinama Kolmogorovo-Čepmeno lygtimi.

Žinodami perėjimo ir pradines tikimybes, galime rasti tikimybę $p_k(n) = \mathbb{P}(X(n) = k)$, kad sistema laiko momentu n bus k-ojoje būsenoje. Iš tikrųjų,

$$
\begin{aligned}
p_k(n) = \mathbb{P}(X(n)=k) &= \sum_j \mathbb{P}(X(0)=j, X(n)=k) = \\
&= \sum_j \frac{\mathbb{P}(X(n)=k, X(0)=j)}{\mathbb{P}(X(0)=j)} \cdot \mathbb{P}(X(0)=j) = \\
&= \sum_j \mathbb{P}(X(n)=k \mid X(0)=j) \cdot \mathbb{P}(X(0)=j) = \sum_j p_j^0 p_{jk}(n).
\end{aligned}
$$

Ši formulė teisinga, kai $n \geq 0$. Teisinga ir bendresnė formulė

$$p_k(n_1+n_2) = \sum_j p_j(n_1) p_{jk}(n_2), \quad n_1 \geq 0,\ n_2 \geq 0.$$

Žinodami pradines ir perėjimo tikimybes, galime rasti ir Markovo grandinės baigtiniamačius pasiskirstymus. Pasirinkime laiko momentus $0 \le n_1 < \ldots < n_k$ ir būsenas $j_1, \ldots, j_k$. Apskaičiuokime tikimybę $\mathbb{P}(X(n_1) = j_1, \ldots, X(n_k) = j_k)$. Iš grandinės apibrėžimo išplaukia

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X(n_1) = j_1, \ldots, X(n_k) = j_k \mid X(n_1) = j_1, \ldots, X(n_{k-1}) = j_{k-1}) \\
&\quad = \mathbb{P}(X(n_k) = j_k \mid X(n_1) = j_1, \ldots, X(n_{k-1}) = j_{k-1}) \\
&\quad = \mathbb{P}(X(n_k) = j_k \mid X(n_{k-1}) = j_{k-1}) = p_{j_{k-1}j_k}(n_k - n_{k-1}).
\end{aligned}$$

Iš čia

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X(n_1) = j_1, \ldots, X(n_k) = j_k) = \\
&\quad = \mathbb{P}(X(n_1) = j_1, \ldots, X(n_k) = j_k \mid X(n_1) = j_1, \ldots, X(n_{k-1}) = j_{k-1}) \times \\
&\qquad \times \mathbb{P}(X(n_1) = j_1, \ldots, X(n_{k-1}) = j_{k-1}) = \\
&\quad = \mathbb{P}(X(n_1) = j_1, \ldots, X(n_{k-1}) = j_{k-1}) \cdot p_{j_{k-1}j_k}(n_k - n_{k-1}).
\end{aligned}$$

Samprotaudami taip pat ir toliau, gausime

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X(n_1) = j_1, \ldots, X(n_k) = j_k) = \\
&\quad = p_{j_1}(n_1) \cdot p_{j_1j_2}(n_2 - n_1) \cdot \ldots \cdot p_{j_{k-1}j_k}(n_k - n_{k-1}).
\end{aligned}$$

Markovo grandinių teorijoje svarbu atsakyti į šitokį klausimą. Sakykime duoti neneigiami skaičiai p_k^0, $\sum_k p_k^0 = 1$, ir stochastinė matrica $\|p_{jk}\|$. Kyla klausimas, ar egzistuoja homogeninė Markovo grandinė, kurios pradinės tikimybės yra skaičiai p_k^0 ir perėjimo tikimybės – skaičiai p_{jk}. Į šį klausimą galima atsakyti teigiamai.

Tarkime, kad $\mathbb{T}$ yra baigtinis, arba begalinis, realiųjų skaičių intervalas, o būsenų erdvė E – baigtinė arba skaiti. Sakysime, kad procesas yra *tolydaus laiko Markovo grandinė*, jei bet kuriam natūraliajam skaičiui n, bet kuriems $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < s < t$ iš $\mathbb{T}$ ir bet kuriems $k, j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, j \in E$ teisingos lygybės

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X(t) = k \mid X(t_0) = j_0, X(t_1) = j_1, \ldots, X(t_{n-1}) = j_{n-1}, X(s) = j) \\
&\quad = \mathbb{P}(X(t) = k \mid X(s) = j).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Ir čia galime kalbėti apie fizinę sistemą, kurios būsena laiko momentu t yra $X(t)$. Tada $\mathbb{P}(X(t) = k \mid X(s) = j)$ yra tikimybė sistemai patekti į k-ąją būseną laiko momentu t, jei laiko momentu s ji buvo j-ojoje būsenoje. Jei ta tikimybė priklauso tik nuo $t - s$, tai grandinė vadinama *homogenine*. Tada galima kalbėti apie perėjimo tikimybę $p_{jk}(t)$ iš j-osios būsenos į k-ąją per laiko tarpą t.

2.37 apibrėžimas. *Puasono procesu su parametru* λ $(\lambda > 0)$ *vadinamas ats. pr.* $N = \{N(t), t \ge 0\}$, *tenkinantis sąlygas:*

1) $N(0) = 0$;

2) bet kokiam rinkiniui $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ *a. d.* $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ *yra nepriklausomi;*

3) A. d. $N(t)-N(s)$, $0 \le s \le t$, skirstinys yra Puasono su parametru $\lambda(t-s)$, t. y.

$$\mathbb{P}\big(N(t)-N(s)=k\big)=\exp\{-\lambda(t-s)\}\,\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}, \qquad k=0,1,2,\dots$$

2.9 uždavinys. *Įrodykite, kad Puasono procesas $N=\{N(t), t\ge 0\}$ yra tolydaus laiko Markovo grandinė.*

Sprendimas. Pastebėsime, kad

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(N(t)=k \mid N(s)=j\big) &= \frac{\mathbb{P}\big(N(t)=k, N(s)=j\big)}{\mathbb{P}\big(N(s)=j\big)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}\big(N(t)-N(s)+N(s)=k, N(s)=j\big)}{\mathbb{P}\big(N(s)=j\big)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}\big(N(t)-N(s)=k-j, N(s)=j\big)}{\mathbb{P}\big(N(s)=j\big)}.
\end{aligned}$$

Puasono proceso pokyčiai yra nepriklausomi. Todėl

$$\mathbb{P}\big(N(t)=k \mid N(s)=j\big)=\mathbb{P}\big(N(t)-N(s)=k-j\big).$$

Analogiškai

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(N(t)=k \mid N(t_0)=j_0, N(t_1)=j_1,\dots,N(t_{n-1})=j_{n-1}, N(s)=j\big)= \\
&\quad =\mathbb{P}\big(N(t)-N(s)=k-j\big),
\end{aligned}$$

nes aibė

$$\big\{N(t)=k, N(t_0)=j_0, N(t_1)=j_1,\dots,N(t_{n-1})=j_{n-1}, N(s)=j\big\}$$

yra sankirta nepriklausomų įvykių

$$\begin{aligned}
&\big\{N(t)-N(s)=k-j\big\}\cap\big\{N(s)-N(t_{n-1})=j-j_{n-1}\big\}\cap \\
&\quad \cap\big\{N(t_0)-N(0)=j_0\big\}\cap\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\big\{N(t_k)-N(t_{k-1})=j_k-j_{k-1}\big\}\right).
\end{aligned}$$

2.6 Markovo procesai

2.38 apibrėžimas. *Atsitiktinis procesas $X=\{X_t,\ t\in[t_0,T]\}$, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ su reikšmėmis $\mathbb{R}^d$, vadinamas* ***Markovo procesu****, jei patenkinta vadinamoji Markovo savybė: bet kuriems $t_0\le s\le t\le T$ ir $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ galioja lygybė*

$$\mathbb{P}\left(X_t\in B|\,\mathcal{F}^s_{t_0}\right)=\mathbb{P}\left(X_s\in B|\,X_s\right) \quad \textit{b. v.,} \quad \mathcal{F}^s_{t_0}=\sigma\{X_u: t_0\le u\le s\}.$$

2.39 teorema. *Markovo savybė yra ekvivalenti:*

$$\forall n\ge 1,\quad t_0\le t_1<\ldots<t_n\le t\le T \quad \textit{ir} \quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

$$\mathbb{P}\left(X_t\in B|\,X_{t_1},\dots,X_{t_n}\right)=\mathbb{P}\left(X_t\in B|\,X_{t_n}\right).$$

Intuityviai ats. pr. Markovo savybė gali būti nusakoma taip: jo tikimybinė elgsena po bet kokio momento t_n (ateityje) priklauso tik nuo proceso reikšmės laiko momentu t_n (dabartyje) ir nepriklauso nuo proceso reikšmių iki laiko momento t_n (praeities).

Tarkime, nagrinėjame ats. pr., kurio reikšmės, kaip a. d., turi tankius.

2.40 apibrėžimas. *Ats. pr. X vadinamas Markovo procesu, jei sąlyginis tankis*

$$f_{X_t|X_{t_1},\dots,X_{t_k},X_s}(y \mid x_1, x_2, \dots, x_k, x) = f_{X_t|X_s}(y \mid x) \tag{2.11}$$

su visais $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_k < s < t$, $x_1, x_2, \dots, x_k, x, y \in \mathbb{R}$.

2.10 uždavinys. *Brauno judesys yra Markovo procesas.*

Sprendimas. Tikriname (2.11) sąlygą. Pasinaudosime rezultatu suformuluotu 2.22 pastaboje ir 2.7 uždaviniu. Žinome, kad

$$\begin{aligned} &f_{W_t|W_{t_1},\dots,W_{t_k},W_s}(y \mid x_1, x_2, \dots, x_k, x) \\ &= \sqrt{\frac{\widehat{a}_{k+2,k+2}}{2\pi}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\,\widehat{a}_{k+2,k+2}\Big[y + \frac{\widehat{a}_{k+1,k+2}}{\widehat{a}_{k+2,k+2}}\,x + \sum_{i=1}^{k}\frac{\widehat{a}_{i,k+2}}{\widehat{a}_{k+2,k+2}}\,x_i\Big]^2\Big\}, \end{aligned}$$

čia $\widehat{a}_{i,k+2}$, $1 \le i \le k+2$, yra matricos A^{-1} elementai, o

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 & t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 & t_2 & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k & t_k & t_k \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k & s & s \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k & s & t \end{pmatrix}.$$

Kai $k = 0$, tai

$$f_{W_t|W_s}(y \mid x) = \sqrt{\frac{\widehat{a}_{2,2}}{2\pi}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\,\widehat{a}_{2,2}\Big[y + \frac{\widehat{a}_{1,2}}{\widehat{a}_{2,k}}\,x\Big]^2\Big\}$$

ir

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}, \quad |A| = s(t-s), \quad |A_{21}| = |A_{22}| = s, \quad \widehat{a}_{22} = (-1)^4\,\frac{a_{11}}{|A|} = (t-s)^{-1} \\ \widehat{a}_{12} =& (-1)^3\,\frac{a_{21}}{|A|} = -(t-s)^{-1}, \end{aligned}$$

čia A_{ji} yra matricos elemento a_{ji} minoras. Todėl

$$f_{W_t|W_s}(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\Big\{ -\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\Big\}.$$

Nesunku pastebėti, kad $|A| = t_1(t_2-t_3)\cdot\ldots\cdot(t_k-t_{k-1})(s-t_k)(t-s)$. Paprastumo dėlei nagrinėkime atvejį $k = 2$. Tuomet $|A_{41}| = |A_{42}| = 0$, $|A_{43}| = |A_{44}| = t_1(t_2 - t_1)(s-t_2)$ ir $\widehat{a}_{44} = (t-s)^{-1}$. Todėl

$$f_{W_t|W_{t_1},W_{t_2},W_s}(y \mid x_1, x_2, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\Big\{ -\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\Big\}.$$

2.41 teiginys. *Tarkime, X yra Gauso procesas su nuliniu vidurkiu, o jo autokoreliacinė funkcija $\rho(s,t)$ tenkina savybę*

$$\rho(t_1,t_3) = \frac{\rho(t_1,t_2)\rho(t_2,t_3)}{\rho(t_2,t_2)}, \tag{2.12}$$

čia $t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{T}$, $t_1 < t_2 < t_3$. Tuomet X yra Markovo procesas.

2.42 pastaba. *Brauno judesys tenkina (2.12) lygybę, nes*

$$\rho(t_1,t_3) = \mathbb{E}W_{t_1}W_{t_3} = t_1, \quad \rho(t_1,t_2) = t_1, \quad \rho(t_2,t_3) = t_2, \quad \rho(t_2,t_2) = t_2.$$

2.11 uždavinys. *Procesas B^0 vadinamas Brauno tiltu, jei*

$$B^0(t) = W(t) - tW(1), \qquad 0 \le t \le 1,$$

čia W – Vynerio procesas. Brauno tiltas yra Markovo procesas.

Sprendimas. Brauno tiltas yra Gauso procesas su nuliniu vidurkiu ir autokoreliacine funkcija $\mathbf{E}B_t^0B_s^0 = s \wedge t - st$. Lieka patikrinti (2.12) lygybę. Tai lengva padaryti.

2.43 apibrėžimas. *Funkcija $P(s,x,t,B)$, tenkinanti savybes:*

a) $P(s,x,t,\cdot)$ *yra tikimybė* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *fiksuotiems* $s \le t$ *ir* $x \in \mathbb{R}^d$;

b) $P(s,\cdot,t,B)$ *yra* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*-mati funkcija fiksuotiems* $s \le t$ *ir* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$;

c) *jei* $t_0 \le s \le u \le t \le T$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *ir* $\forall x \in \mathbb{R}^d$

$$P(s,x,t,B) = \int_{\mathbb{R}^d} P(u,y,t,B)P(s,x,u,dy);$$

d) $\forall s \in [t_0,T]$ *ir* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *teisinga*

$$P(s,x,t,B) = \mathbf{1}_B(x),$$

vadinama ***perėjimo tikimybe****.*

Jei X yra Markovo procesas ir $P(s,x,t,B)$ yra tokia perėjimo tikimybė, kad fiksuotiems $s \le t$ ir $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ teisinga lygybė

$$P(s,X_s,t,B) = P(X_t \in B |\, X_s) \quad \textit{b. v.},$$

tai $P(s,x,t,B)$ vadinama ***Markovo proceso*** *X* ***perėjimo tikimybe****.*

Naudojamas žymėjimas

$$P(s,x,t,B) = \mathbb{P}(X_t \in B |\, X_s = x),$$

kuris interpretuojamas kaip tikimybė, kad stebimas procesas bus aibėje B laiko momentu t, jei laiko momentu s, $s \le t$, jis buvo būsenoje x.

2.44 pastaba. *Jei tikimybė $P(s,x,t,\cdot)$ turi tankį, t. y. jei visiems $s,t \in [t_0,T]$, visiems $x \in \mathbb{R}^d$ ir visoms $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, tai*

$$P(s,x,t,B) = \int_B p(s,x,t,y)\,dy, \quad s < t.$$

Čia $p(s,x,t,y)$ yra funkcija, įgyjanti neneigiamą reikšmę, kuri yra mati y atžvilgiu ir kurios integralas lygus 1.

2.45 teorema. *Jei $X = \{X_t,\, t \in [t_0,T]\}$ yra Markovo procesas ir jei $P(s,x,t,B)$ yra jo perėjimo tikimybė, o P_{t_0} yra X_{t_0} skirstinys, t. y.*

$$P_{t_0}(A) = \mathbb{P}(X_{t_0} \in A),$$

tai bet kokiems $t_0 \le t_1 < \ldots < t_n \le T$ ir $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\right) = \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{B_1}\cdots\int_{B_{n-1}} P\left(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, B_n\right)\cdots P\left(t_0, x_0, t_1, dx_1\right) P_{t_0}(dx_0),\end{aligned}$$

o atskiru atveju

$$\mathbb{P}\left(X_t \in B\right) = \int_{\mathbb{R}^d} P(t_0,x,t,B) P_{t_0}(dx).$$

2.46 apibrėžimas. *Markovo procesą $X = \{X_t,\, t \in [t_0,T]\}$ vadiname **homogeniniu** (laiko atžvilgiu), jei jo perėjimo tikimybė $P(s,x,t,B)$ yra stacionari, t. y.*

$$P\left(s+u, x, t+u, B\right) = P\left(s,x,t,B\right),$$

kai $t_0 \le s \le t \le T$ ir $t_0 \le s+u \le t+u \le T$. Šiuo atveju perėjimo tikimybė yra funkcija x, $t-s$ ir B. Todėl ją galima užrašyti

$$P(t-s,x,B) = P(s,x,t,B), \quad 0 \le t-s \le T-t_0.$$

Vadinasi, $P(t,x,B)$ yra tikimybė pereiti iš x į B per laiką t.

Jei W yra Brauno judesys, tai jis yra homogeninis Markovo procesas su perėjimo tikimybe

$$P(t,x,A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2t}\right\} dy.$$

2.7 Diskretaus laiko martingalai

Nagrinėsime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2.47 apibrėžimas. *σ-algebrų $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots$, apibrėžtų Ω, ir tokių, kad $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}$, seką vadinsime **filtracija**.*

2.48 apibrėžimas. *Sakysime, kad a. d. seka (ξ_n) yra **suderinta** su filtracija $(\mathcal{F}_n)$, jei ξ_n yra $\mathcal{F}_n$-matus kiekvienam $n \in \mathbb{N}$.*

2.49 apibrėžimas. *Jei a. d. seka* (ξ_n) *yra tokia, kad kiekvienam* $n \geq 1$ *a. d.* ξ_n *yra* $\mathcal{F}_{n-1}$*-matūs, tai rašysime* $\xi = (\xi_n, \mathcal{F}_{n-1})_{n\geq 1}$ *ir* ξ *vadinsime* ***numatoma seka****.*

1 pavyzdys. Jei $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1 \ldots, \xi_n)$ yra σ-algebra, generuota a. d. $\xi_1 \ldots, \xi_n$, tai seka (ξ_n) yra suderinta su filtracija $(\mathcal{F}_n)$.

2.50 apibrėžimas. *A. d. seka* (ξ_n)*, suderinta su filtracija* $(\mathcal{F}_n)$*, vadinama* ***martingalu****, jei bet kokiems* $n \geq 1$*:*

$$\begin{aligned} &1) \quad \mathbb{E}|\,\xi_n| < \infty; \\ &2) \quad \mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \xi_n \quad \text{b. v.} \qquad \square \end{aligned}$$

Sakydami, kad a. d. seka (ξ_n) yra martingalas, mes visada ją turime susieti su kokia nors filtracija. Todėl norėdami pabrėžti, su kokia filtracija nagrinėjamas martingalas yra suderintas, rašysime $\xi = (\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.

2.51 apibrėžimas. *A. d. seka* (ξ_n)*, suderinta su filtracija* $(\mathcal{F}_n)$*, vadinama* ***submartingalu****, jei bet kokiems* $n \geq 1$*:*

$$\begin{aligned} &1) \quad \mathbb{E}|\,\xi_n| < \infty; \\ &2) \quad \mathbb{E}(\xi_{n+1}|\,\mathcal{F}_n) \geq \xi_n \quad \text{b. v.} \end{aligned}$$

2.52 apibrėžimas. *A. d. seka* (ξ_n)*, suderinta su filtracija* $(\mathcal{F}_n)$*, vadinama* ***supermartingalu****, jei a. d. seka* $-\xi = (-\xi_n, \mathcal{F}_n)$ *yra submartingalas.*

2.12 uždavinys. *Tarkime, kad* (ξ_n) *yra nepriklausomų a. d. seka tokia, kad* $\mathbb{E}|\xi_n| < \infty$ *ir* $\mathbb{E}\xi_n = 0$*. Pažymėsime* $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$*,* $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$*. Įrodykite, kad* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$*, yra martingalas.*

Sprendimas. Patikrinsime martingalo apibrėžimo 2) savybę, nes a. d. seka (ξ_n) yra suderinta su filtracija $(\mathcal{F}_n)$ ir integruojama. Pasinaudoję sąlyginio vidurkio d) savybe, gauname

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n + \xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n).$$

Pastebėsime, kad a. d. X_n yra $\mathcal{F}_n$-matus. Todėl $\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_n) = X_n$. Kadangi a. d. ξ_{n+1} nepriklauso nuo $\mathcal{F}_n$, tai vietoje sąlyginio vidurkio galime rašyti paprastą vidurkį, kuris lygus 0. Gauname, kad

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(\xi_{n+1}) = X_n$$

ir $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ yra martingalas.

2.13 uždavinys. *Tarkime, kad* $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ *yra martingalas. Įrodykite, kad* $(\xi_n, \mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ *yra martingalas, jei* $\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$*.*

Sprendimas. Reikia patikrinti, kad seka $(\xi_n, \mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ tenkina 2.50 apibrėžimo 2) sąlygą. Kadangi $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$, tai iš sąlyginio vidurkio savybių gausime, kad

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(\xi_n \mid \mathcal{G}_n) = \xi_n.$$

2.14 uždavinys. *Tarkime,* (ξ_n) *– nepriklausomų a. d. seka tokia, kad* $\mathbb{E}\xi_k = 1$*,* $k \geq 1$*. Įrodykite, kad* $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ *yra martingalas, jei*

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} \xi_k, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Sprendimas. A. d. X_n integruojamumas gaunamas iš 1.37 išvados. Patikrinsime 2) savybę. Kadangi a. d. X_n yra $\mathcal{F}_n$-matus, o a. d. ξ_{k+1} nepriklauso nuo $\mathcal{F}_n$, tai

$$\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n+1} \xi_k \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(\xi_{n+1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \xi_k \mid \mathcal{F}_n\right) = \prod_{k=1}^{n} \xi_k \cdot \mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$
$$= X_n \cdot \mathbb{E}\xi_{n+1} = X_n.$$

2.15 uždavinys. *Tarkime,* (ξ_n) *– nepriklausomų a. d. seka,* $\xi_k \sim \mathcal{N}(0,1)$*,* $k \in \mathbb{N}$*. Pažymėkime* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$*,* $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$*. Tarkime,* (a_n) *– realiųjų skaičių seka. Įrodykite, kad*

$$Z_n = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}, \quad n \geq 1,$$

yra martingalas filtracijos $(\mathcal{F}_n)$ *atžvilgiu ir* $\mathbb{E}Z_n = 1$ *visiems* $n \in \mathbb{N}$*.*

Sprendimas. Kadangi (ξ_n) – nepriklausomų a. d. seka, tai

$$\mathbb{E}Z_n = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\exp\left\{a_k \xi_k - \frac{a_k^2}{2}\right\}$$

ir (žr. 1 skyriaus 5 uždavinį)

$$\mathbb{E}\exp\left\{a_k \xi_k - \frac{a_k^2}{2}\right\} = \exp\left\{-\frac{a_k^2}{2}\right\} \cdot \mathbb{E}\exp\{a_k \xi_k\} = \exp\left\{-\frac{a_k^2}{2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{a_k^2}{2}\right\}.$$

Vadinasi, $\mathbb{E}Z_n = 1$.

Toliau

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\} \cdot \exp\left\{a_{n+1}\xi_{n+1} - \frac{a_{n+1}^2}{2}\right\} \middle| \mathcal{F}_n\right) =$$
$$= Z_n \cdot \mathbb{E}\exp\left\{a_{n+1}\xi_{n+1} - \frac{a_{n+1}^2}{2}\right\} = Z_n.$$

2.16 uždavinys. *Tarkime,* (η_n) *– seka tokių nepriklausomų a. d., kad* $\mathbb{P}(\eta_k = 1) = \mathbb{P}(\eta_k = -1) = \frac{1}{2}$*. Pažymėkime* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$ *ir* $\xi_n = (-1)^n \cos(\pi S_n)$*. Įrodykite, kad* $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ *yra martingalas, čia* $\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n)$*.*

Sprendimas. Kadangi ξ_n yra funkcija nuo S_n, tai ξ_n yra $\mathcal{F}_n$-matus a. d. (žr. 1.5 uždavinį) kiekvienam n. Kadangi $|\xi_n| \leq 1$, tai ξ_n yra integruojamas. Be to, η_{n+1} nepriklauso nuo $\mathcal{F}_n$. Tuomet

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbb{E}\left((-1)^n \cos\left[\pi S_{n-1} + \pi\eta_n\right] \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= (-1)^n \mathbb{E}\left(\cos(\pi S_{n-1}) \cdot \cos(\pi\eta_n) - \sin\left(\pi S_{n-1}\right) \cdot \sin\left(\pi\eta_n\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= (-1)^n \cos\left(\pi S_{n-1}\right) \mathbb{E}\left(\cos(\pi\eta_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - \\
&\quad - (-1)^n \sin\left(\pi S_{n-1}\right) \mathbb{E}\left(\sin(\pi\eta_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\
&= (-1)^n \cos\left(\pi S_{n-1}\right) \mathbb{E}\left(\cos\left(\pi\eta_n\right)\right) - (-1)^n \sin\left(\pi S_{n-1}\right) \mathbb{E}\left(\sin\left(\pi\eta_n\right)\right) = \\
&= (-1)^n \cos\left(\pi S_{n-1}\right) \left[\cos(-\pi) \cdot \frac{1}{2} + \cos(\pi) \cdot \frac{1}{2}\right] - \\
&\quad - (-1)^n \sin\left(\pi S_{n-1}\right) \left[\sin(-\pi) \cdot \frac{1}{2} + \sin(\pi) \cdot \frac{1}{2}\right] = \\
&= (-1)^n \cos\left(\pi S_{n-1}\right) \cdot 2\cos(\pi) \cdot \frac{1}{2} = (-1)^n \cos\left(\pi S_{n-1}\right) \cdot (-1) = \\
&= (-1)^{n-1} \cos\left(\pi S_{n-1}\right) \cdot (-1)^2 = (-1)^{n-1} \cos\left(\pi S_{n-1}\right) = \xi_{n-1}.
\end{aligned}$$

2 pavyzdys. Tegul (ξ_n) – seka neneigiamų integruojamų a. d. Tada $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ yra submartingalas filtracijos $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ atžvilgiu, nes $\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq 0$ ir

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n\,.$$

2.53 apibrėžimas. *A. d. seka (ξ_n) vadinama **martingaliniu skirtumu**, jei $\mathbb{E}|\,\xi_n| < \infty$ bet kokiems $n \geq 1$ ir*

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 0 \quad \text{b. v.}$$

3 pavyzdys. Jei $X = (X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ yra martingalas, tai $\xi_n = X_n - X_{n-1}$ yra martingalinis skirtumas, kai $n \geq 2$.

2.8 Tolydaus laiko martingalai

Duota tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Raide $\mathbb{T}$, $\mathbb{T} \subset [0, \infty)$, žymėsime baigtinį ar begalinį intervalą.

2.54 apibrėžimas. *σ-algebrų $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$, apibrėžtų Ω, $t \in \mathbb{T}$, šeimą vadinsime **filtracija**, jei*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \text{visiems } s, t \in \mathbb{T} \text{ tokiems, kad } s \leq t.$$

*Paprastai reikalaujama, kad filtracija $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), t \in \mathbb{T}$, tenkintų **įprastines sąlygas**, t. y. filtracija turi būti tolydi iš dešinės ($\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$) ir $\mathcal{F}_0$ priklauso visos $\mathbb{P}$-nulinio mato aibės iš $\mathcal{F}$.*

2.55 apibrėžimas. *Stochastinis procesas $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ vadinamas **martingalu** (submartingalu, supermartingalu) filtracijos $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$ atžvilgiu, jei:*

a) $X(t)$ yra integruojamas kiekvienam $t \in \mathbb{T}$, t. y. $\mathbb{E}|X(t)| < \infty$;

b) $X(t)$ yra $\mathcal{F}_t$-matus kiekvienam $t \in \mathbb{T}$, t. y. X yra suderintas su filtracija $\mathbb{F}$;

c) $X(s) = \mathbb{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s)$ *(atitinkamai* $\leq$ *arba* $\geq$*) visiems* $s, t \in \mathbb{T}$*, tokiems, kad* $s \leq t$*.*

Norėdami pabrėžti, su kokia filtracija nagrinėjamas martingalas yra suderintas, rašysime $X = (X(t), \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

1 pavyzdys. Procesas $N(t) - \lambda t$ yra martingalas filtracijos $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{N(s), s \leq t\}$ atžvilgiu, čia N – Puasono procesas su parametru λt.

Kadangi N yra Puasono procesas su parametru λt, tai

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Reikia patikrinti martingalo apibrėžimo sąlygas. Integruojamumas bus, jei $\mathbb{E}|N(t)| < \infty$. Kadangi $N(t)$ yra neneigiamas, tai

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\,N(t)| &= \mathbb{E}N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(N(t) = n) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = \\ &= \lambda te^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda te^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{(n)!} = \lambda te^{-\lambda t}e^{\lambda t} = \lambda t.\end{aligned}$$

$N(t) - \lambda t$ yra $\mathcal{F}_t$ matus, nes toks yra $N(t)$.

Žinome, kad Puasono procesas yra procesas su nepriklausomais pokyčiais. Todėl a. d. $N(t) - N(s)$ yra nepriklausomas $\mathcal{F}_s$ atžvilgiu visiems $0 \leq s \leq t$. Vadinasi,

$$\mathbb{E}\Big(N(t) - N(s) \mid \mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big(N(t) - N(s)\Big) = \lambda t - \lambda s.$$

Taigi

$$\mathbb{E}\Big(N(t) - \lambda t \mid \mathcal{F}_s\Big) = \mathbb{E}\Big(N(s) - \lambda s \mid \mathcal{F}_s\Big) = N(s) - \lambda s.$$

2 pavyzdys. Tarkime, kad $W = (W(t), \mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ yra Brauno judesys. Tada $(W(t), \mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ yra martingalas; čia $\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$. Jis yra integruojamas, nes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\,W(t)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}|\,x|\,e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|\,x|\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\int_0^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{2t}{\pi}},\end{aligned}$$

(arba pasinaudojus Koši nelygybe ir Vynerio proceso apibrėžimu $\mathbb{E}|\,W(t)| \leq \sqrt{\mathbb{E}W^2(t)} = \sqrt{t}$) ir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(W(t) \mid \mathcal{F}_s^W\Big) &= \mathbb{E}\Big(W(t) - W(s) \mid \mathcal{F}_s^W\Big) + \mathbb{E}\Big(W(s) \mid \mathcal{F}_s^W\Big) = \\ &= \mathbb{E}\Big(W(t) - W(s)\Big) + W(s) = W(s).\end{aligned}$$

3 pavyzdys. Procesas $X = \{W^2(t) - t, t \geq 0\}$ yra martingalas filtracijos $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$, atžvilgiu:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(W^2(t) \mid \mathcal{F}_s^W\Big) &= \mathbb{E}\Big([W(t) - W(s) + W(s)]^2 \mid \mathcal{F}_s^W\Big) = \\ &= \mathbb{E}\Big([W(t) - W(s)]^2 \mid \mathcal{F}_s^W\Big) + 2\,\mathbb{E}\Big([W(t) - W(s)]W(s) \mid \mathcal{F}_s^W\Big) + \mathbb{E}\Big(W^2(s) \mid \mathcal{F}_s^W\Big) = \\ &= \mathbb{E}\Big(W(t) - W(s)\Big)^2 + 2W_s\mathbb{E}\Big(W(t) - W(s)\Big) + W^2(s) = t - s + W^2(s),\end{aligned}$$

iš čia gauname, kad

$$\mathbb{E}\Big(W^2(t) - t \mid \mathcal{F}_s^W\Big) = W^2(s) - s.$$

4 pavyzdys. Procesas $\exp\{W(t) - t/2\}$ yra martingalas filtracijos $\mathbb{F}^W$ atžvilgiu:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\exp\{W(t)\} \mid \mathcal{F}_s^W\Big) &= \mathbb{E}\Big(\exp\{W(t) - W(s)\} \cdot \exp\{W(s)\} \mid \mathcal{F}_s^W\Big) = \\ &= e^{W(s)}\mathbb{E}\Big(\exp\{W(t) - W(s)\} \mid \mathcal{F}_s^W\Big) = \\ &= e^{W(s)}\mathbb{E}\Big(\exp\{W(t) - W(s)\}\Big)\end{aligned}$$

ir

$$\mathbb{E}\Big(\exp\{W(t) - W(s)\}\Big) = e^{\frac{t-s}{2}}.$$

Pasinaudojome 1 skyriaus 5 uždaviniu. Vadinasi,

$$\mathbb{E}\Big(e^{W(t)-t/2} \mid \mathcal{F}_s^W\Big) = e^{W(s)-s/2}.$$

2.9 Kvadratu integruojami martingalai

2.56 apibrėžimas. *Tarkime, $X = (X(t), \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ yra tolydus iš dešinės martingalas. Sakysime, kad X yra* ***kvadratu integruojamas****, jei $\mathbb{E}X^2(t) < \infty$ bet kokiam $t \geq 0$, t. y.*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}X^2(t) < \infty.$$

Jei papildomai $X(0) = 0$ b. v., tai rašysime $X \in \mathcal{M}_2$ (arba $X \in \mathcal{M}_2^c$, jei X yra tolydus).

Jei $X \in \mathcal{M}_2$, tai $X^2 = (X^2(t), \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ yra neneigiamas submartingalas.

Pavyzdys. Tarkime, kad $W = (W(t), \mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ yra Brauno judesys. Ats. pr. W^2 nėra kvadratu integruojamas martingalas. Kadangi $\mathbb{E}W^2(t) = t$, tai

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}W^2(t) = \infty. \qquad \square$$

Nagrinėkime ats. pr.

$$\widehat{W}(t) := W(t \wedge T) := \begin{cases} W(t), & \text{kai} \quad 0 \leq t < T, \\ W(T), & \text{kai} \quad t \geq T. \end{cases}$$

Procesą $\widehat{W}(t)$, $t \geq 0$, galime interpretuoti kaip procesą W stebimą iki momento T ir jį galime sutapatinti su procesu $W(t)$, $0 \leq t \leq T$. Jis jau bus kvadratu integruojamas martingalas.

2.57 apibrėžimas. *A. d.* $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{T} \subset [0, \infty)$, *vadinamas* ***stabdymo momentu*** *filtracijos* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *atžvilgiu, jei kiekvienam* $t \in \mathbb{T}$ *aibė*

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

2.58 apibrėžimas. *Ats. pr.* $M = (M(t), \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *vadinamas* ***lokaliu martingalu****, jei egzistuoja stabdymo momentų seka* (τ_n) *tokia, kad*

(*a*) $0 \leq \tau_n \leq \tau_{n+1}$ *b. v.*,

(*b*) $\tau_n \uparrow \infty$ *b. v.*,

(*c*) *kiekvienam* $n \geq 1$ *sustabdytas procesas* $M^{\tau_n}(t) = M(t \wedge \tau_n)$ *yra* $(\mathcal{F}_t)$*-martingalas.*

2.59 apibrėžimas. *Ats. pr.* $M = (M(t), \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *vadinamas* ***lokaliai kvadratu integruojamu martingalu****, jei jis yra lokalus martingalas ir kiekvienas sustabdytas procesas* $M^{\tau_n}(t)$ *yra kvadratu integruojamas martingalas.*

2.10 Stochastinis integralas Brauno judesio atžvilgiu

Funkcijos f Styltjeso integralą intervale $[a, b]$ funkcijos g atžvilgiu galima apibrėžti kaip ribą

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \lim_{\max_i |\Delta t_i| \to 0} \sum_i f(s_i)\, [g(t_{i+1}) - g(t_i)]\, ;$$

čia $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ yra intervalo $[a, b]$ skaidinys, (s_i) – jo tarpinis skaidinys, t. y. $s_i \in [t_i, t_{i+1}]$, o $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Styltjeso integralo reikšmė nepriklauso nei nuo (s_i), nei nuo skaidinio (t_i) reikšmių.

Tokiam integralui egzistuoti pakanka, kad $f \in D([a, b])$ (t. y. funkcija f apibrėžta $[a, b]$ ir neturi antros rūšies trūkių) ir $V(g; [a, b]) < \infty$. Jei $g \in C^1([a, b])$ (t. y. funkcija g apibrėžta $[a, b]$ ir turi tolydžią išvestinę), o $f \in C([a, b])$ (t. y. funkcija f apibrėžta $[a, b]$ ir yra tolydi), tai Styltjeso integralas $\int_a^b f(t)\, dg(t)$ egzistuoja ir

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \int_a^b f(t) g'(t)\, dt. \tag{2.13}$$

Mes norime apibrėžti stochastinį integralą $\int_0^t Y(s)\, dW(s)$, kai integruojamoji funkcija Y yra atsitiktinė, o integruojančioji funkcija W yra Brauno judesys.

Kadangi Brauno judesio trajektorijos yra niekur nediferencijuojamos, tai stochastinio integralo negalime apibrėžti (2.13) formule. Prisiminę, kad W trajektorijos turi begalinę variaciją bet kokiame intervale, negalime apibrėžti stochastinio integralo kaip Styltjeso integralo.

Nagrinėkime sumą

$$\sum_{j=0}^{n-1} Y(s_j)\, [W(t_{j+1}) - W(t_j)]\, ,$$

čia $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ yra intervalo $[0, T]$ skaidinys, (s_i) – jo tarpinis skaidinys. Pasirodo, kad šios sumos riba priklauso nuo taško s_j pasirinkimo.

2.17 uždavinys. *Tarkime,* $\Delta^n = \{t_k^n, 1 \le k \le n\}$ *yra toks intervalo* $[0, T]$ *skaidinys, kad*

$$|\,\Delta^n| = \max_k \left(t_{k+1}^n - t_k^n\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Rasime ribas

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)\left[W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\right]$$

ir

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n)\left[W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\right],$$

t. y. į ką konverguoja atitinkamos ribos kvadratinio vidurkio prasme.

Sprendimas. Teisingos lygybės

$$a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(b-a)^2, \quad b(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(b-a)^2.$$

Tada

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)\left[W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\right] = \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[W^2(t_{j+1}^n) - W^2(t_j^n)\right] - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\right]^2 = \\
&\quad = \frac{1}{2}\,W^2(T) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\right]^2 \xrightarrow{\mathbf{L}^2} \frac{1}{2}\,W^2(T) - \frac{1}{2}\,T.
\end{aligned}$$

Panašiai

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n)\left[W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\right] = \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[W^2(t_{j+1}^n) - W^2(t_j^n)\right] + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\right]^2 = \\
&\quad = \frac{1}{2}\,W^2(T) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\right]^2 \xrightarrow{\mathbf{L}^2} \frac{1}{2}\,W^2(T) + \frac{1}{2}\,T. \qquad \square
\end{aligned}$$

Tarkime, filtracija $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ tenkina įprastines sąlygas ir su visais $t \ge 0$ a.d. W_t yra $\mathcal{F}_t$-matus ir pokyčiai $W_s - W_u$, $s \ge u \ge t$, nepriklauso nuo σ-algebros $\mathcal{F}_t$, t. y. nuo visų $\mathcal{F}_t$ mačiųjų a. d.

2.60 apibrėžimas. *Ats. pr.* $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ *vadinamas* ***laiptiniu****, jei egzistuoja intervalo* $[0,T]$ *skaidinys* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ *ir kvadratu integruojami a. d.* $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ *tokie, kad*

$$X(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t), \tag{2.14}$$

čia η_j *yra* $\mathcal{F}_{t_j}$*-matus a. d.,* $j = 0, 1, \ldots, n-1$*. Šią laiptinių procesų aibę žymėsime* $\mathbb{S}^2[0,T]$.

Procesas X yra $\{\mathcal{F}_t, t \le T\}$ suderintas. Tikrai, jei $t \in [t_j, t_{j+1})$, tai $\{X(t) < c\} = \{\eta_j < c\} \in \mathcal{F}_{t_j} \subset \mathcal{F}_t$. Be to, jei $X, Y \in \mathbb{S}^2[0,T]$, tai ir $aX + bY \in \mathbb{S}^2[0,T]$ bet kokiems $a, b \in \mathbb{R}$.

2.61 apibrėžimas. *Laiptinio proceso* (2.14) ***stochastiniu integralu*** (*arba* ***Ito integralu***) *intervale* $[0,T]$ *vadinsime sumą*

$$I_T(X) := \int_0^T X(t) dW(t) := \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \left[W(t_{j+1}) - W(t_j) \right].$$

2.62 teiginys. *Stochastinis integralas klasėje* $\mathbb{S}^2[0,T]$ *pasižymi šiomis savybėmis:*

1) *jei* $X, Y \in \mathbb{S}^2[0,T]$*,* $a, b \in \mathbb{R}$*, tai*

$$\int_0^T (aX + bY)(t)\, dW_t = a \int_0^T X(t)\, dW(t) + b \int_0^T Y(t)\, dW(t);$$

2) $\mathbb{E} \int_0^T X(t)\, dW(t) = 0$;

3) $\mathbb{E} \left(\int_0^T X(t)\, dW(t) \right)^2 = \mathbb{E} \int_0^T X^2(t)\, dt$;

4) $\mathbb{E} \left(\int_0^T X(t)\, dW(t) \cdot \int_0^T Y(t)\, dW(t) \right) = \mathbb{E} \int_0^T X(t) \cdot Y(t)\, dt$.

Įrodymas. 1. Visų pirma pastebėsime, kad nemažindami bendrumo baigtinius procesus X ir Y galime laikyti turinčiais **tuos pačius** pastovumo intervalus. Iš tikrųjų, priešingu atveju, apjungę skaidinius, atitinkančius procesus X ir Y, gautume naują skaidinį, kurio intervaluose **abu** procesai X ir Y būtų pastovūs. Taigi imkime tokį intervalo $[0,T]$ skaidinį $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, kad

$$X(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t) \quad \text{ir} \quad Y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

čia η_j ir ξ_j yra $\mathcal{F}_{t_j}$-matūs a. d. su visais $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Pasižymėkime

$$\Delta_j W = W(t_{j+1}) - W(t_j).$$

Tada

$$(aX + bY)(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (a\eta_j + b\xi_j) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

ir

$$\int_0^T (aX+bY)(t)\,dW(t) = \sum_{j=0}^{n-1}(a\eta_j + b\xi_j)\Delta_j W =$$
$$= a\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j\Delta_j W + b\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j\Delta_j W = a\int_0^T X(t)\,dW(t) + b\int_0^T Y(t)\,dW(t).$$

2.

$$\mathbb{E}\int_0^T X(t)\,dW(t) = \mathbb{E}\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j\Delta_j W = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\eta_j\Delta_j W\right) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\mathbb{E}\left(\eta_j\Delta_j W|\,\mathcal{F}_{t_j}\right) = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\eta_j\mathbb{E}\left(\Delta_j W|\,\mathcal{F}_{t_j}\right)\right] =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\eta_j\cdot\mathbb{E}\Delta_j W = 0.$$

3. Pažymėkime $\Delta_j t = t_{j+1} - t_j$. Turime $\mathbb{E}\Delta_j W = 0$ ir $\mathbb{E}(\Delta_j W)^2 = \Delta_j t$.

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)dW(t)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j\Delta_j W\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\eta_i\Delta_i W\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j\Delta_j W\right) =$$
$$= \mathbb{E}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(\eta_i\eta_j\Delta_i W\Delta_j W) = \mathbb{E}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_i^2\left(\Delta_i W\right)^2 + 2\mathbb{E}\sum_{i<j}(\eta_i\eta_j\Delta_i W\Delta_j W) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\eta_i^2\left(\Delta_i W\right)^2\right] + 2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left(\eta_i\eta_j\Delta_i W\Delta_j W\right).$$

Pastebėsime, kad

$$\mathbb{E}\left[\eta_i^2\left(\Delta_i W\right)^2\right] = \mathbb{E}\eta_i^2\cdot\mathbb{E}\left(\Delta_i W\right)^2 = \mathbb{E}\eta_i^2\cdot\Delta_i t.$$

Jei $i<j$, tai

$$\mathbb{E}\Big(\eta_i\eta_j\Delta_i W\Delta_j W\Big) = \mathbb{E}\Big[\left(\eta_i\eta_j\Delta_i W\right)\mathbb{E}\left(\Delta_j W|\,\mathcal{F}_{t_j}\right)\Big] = \mathbb{E}(\eta_i\eta_j\Delta_i W)\cdot\mathbb{E}\Delta_j W = 0.$$

Todėl

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\,dW(t)\right)^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\eta_i^2\cdot\Delta_i t = \mathbb{E}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_i^2\cdot\Delta_i t = \mathbb{E}\int_0^T X^2(t)\,dt,$$

nes

$$\int_0^T X^2(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} X^2(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1}\eta_i^2\Delta_i t.$$

4. Du kartus pasinaudoję tapatybe

$$ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$$

ir 1 bei 3 savybėmis, turime

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\,dW(t)\cdot\int_0^T Y(t)\,dW(t)\right) = \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}\Bigg[\left(\int_0^T X(t)\,dW(t) + \int_0^T Y(t)\,dW(t)\right)^2 - \\
&\quad - \left(\int_0^T X(t)\,dW(t) - \int_0^T Y(t)\,dW(t)\right)^2\Bigg] = \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\int_0^T (X(t)+Y(t))\,dW(t)\right)^2 - \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\int_0^T (X(t)-Y(t))\,dW(t)\right)^2 = \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}\int_0^T (X(t)+Y(t))^2\,dt - \frac{1}{4}\mathbb{E}\int_0^T (X(t)-Y(t))^2\,dt = \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{4}\left[(X(t)+Y(t))^2 - (X(t)-Y(t))^2\right]dt = \mathbb{E}\int_0^T X(t)Y(t)\,dt. \qquad \square
\end{aligned}$$

2.63 teiginys. *Kiekvienam atsitiktiniam procesui* $X = \{X(t), t \in [0,T]\} \in \mathbb{H}^2[0,T]$, *t. y. suderintam intervale* $[0,T]$ *su* $(\mathcal{F}_t)$, $t \in [0,T]$, *ir tokiam, kad*

$$\|X\|^2 := \mathbb{E}\int_0^T X^2(t)dt < \infty,$$

egzistuoja aprėžtų laiptinių procesų seka $(X^n) \in \mathbb{S}_b[0,T]$, *konverguojanti į* X *erdvėje* $\mathbb{H}^2[0,T]$ (*rašysime* $X^n \xrightarrow{\mathbf{H}^2} X$), *t. y. tokia, kad*

$$\|X^n - X\|^2 := \mathbb{E}\int_0^T (X^n(t) - X(t))^2\,dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

2.64 pastaba. *Funkcija* $\|\cdot\|$ *tenkina įprastines normos savybes.*

2.65 apibrėžimas. *Sakykime,* $X \in \mathbb{H}^2[0,T]$ *ir* $\mathbb{S}_b[0,T] \ni X^n \xrightarrow{H^2} X$. *Atsitiktinio proceso* X ***stochastiniu integralu*** (*arba* ***Ito integralu***) *Brauno judesio atžvilgiu intervale* $[0,T]$ *vadinsime ribą*

$$\int_0^T X(t)dW(t) := \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^T X^n(t)dW(t),$$

t. y.

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T X(t)dW(t) - \int_0^T X^n(t)dW(t)\right|^2 \longrightarrow 0 \qquad n \to \infty. \qquad \square$$

Nurodyta riba visada egzistuoja. Iš tikrųjų,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X^n(t)dW(t) - \int_0^T X^m(t)dW(t)\right)^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T (X^n(t) - X^m(t))\,dW(t)\right]^2 =$$
$$= \mathbb{E}\int_0^T (X^n(t) - X^m(t))^2\,dt = \|X^n - X^m\|^2 \leq$$
$$\leq (\|X^n - X\| + \|X - X^m\|)^2 \longrightarrow 0, \quad n, m \to \infty.$$

Taigi integralų seka $(\int_0^T X^n(t)\,dW(t))$ yra a. d. Koši seka L^2 prasme ir todėl konverguoja L^2 prasme. Be to, ši riba nepriklauso nuo sekos $\mathbb{S}_b[0,T] \ni X^n \xrightarrow{H^2} X$ pasirinkimo.

2.66 teorema. *Stochastinis integralas $\mathbb{H}^2[0,T]$ klasėje pasižymi savybėmis:*

1) *jei $X, Y \in \mathbb{H}^2[0,T]$, $a, b \in \mathbb{R}$, tai $\int_0^T (aX(t) + bY(t))\,dW(t) = a\int_0^T X(t)\,dW(t) + b\int_0^T Y(t)\,dW(t)$;*

2) *$\mathbb{E}\int_0^T X(t)\,dW(t) = 0$;*

3) *$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\,dW(t)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T X^2(t)\,dt$;*

4) *$\mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\,dW(t) \cdot \int_0^T Y(t)\,dW(t)\right) = \mathbb{E}\int_0^T X(t)Y(t)\,dt$.*

Įrodymas. Įrodysime 3 lygybę. Sakykime, $S_b \ni X^n \xrightarrow{H^2} X \in \mathbb{H}^2$, t. y.

$$\|X^n - X\|^2 = \mathbb{E}\int_0^T (X^n(t) - X(t))^2\,dt \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

Laiptiniams procesams turėjome lygybę

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X^n(t)\,dW(t)\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^T (X^n(t))^2\,dt. \tag{2.15}$$

Iš stochastinio integralo apibrėžimo turime, kad

$$\int_0^T X^n(t)\,dW(t) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_0^T X(t)\,dW(t)\,.$$

Kadangi

$$\left|\sqrt{\mathbb{E}\Big(\int_0^T X(t)\,dW(t)\Big)^2} - \sqrt{\mathbb{E}\Big(\int_0^T X^n(t)\,dW(t)\Big)^2}\right| =$$
$$= \left|\left\|\int_0^T X(t)\,dW(t)\right\|_{L^2} - \left\|\int_0^T X^n(t)\,dW(t)\right\|_{L_2}\right| \leq$$
$$\leq \left\|\int_0^T X(t)\,dW(t) - \int_0^T X^n(t)\,dW(t)\right\|_{L^2} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty,$$

tai

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T X^n(t)\,dW(t)\right)^2 \longrightarrow \mathbb{E}\left(\int_0^T X(t)\,dW(t)\right)^2, \quad n \to \infty.$$

Kita vertus,

$$|\,\|X^n\| - \|X\|\,| \leq \|X^n - X\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

t. y. $\|X^n\| \to \|X\|$, $n \to \infty$. Vadinasi, $\|X^n\|^2 \to \|X\|^2$, $n \to \infty$. Todėl, perėję prie ribos (2.15), gausime reikiamą tvirtinimą. □

Ar Brauno judesys priklauso $\mathbb{H}^2[0,T]$? Prieš atsakydami į šį klausimą, suformuluosime Fubini teoremą.

2.67 teorema (Fubini)**.** *Tarkime, $X = \{X(t), t \in [a,b]\}$ yra tolydus iš dešinės (arba kairės) atsitiktinis procesas. Jei $X(t) \geq 0$ b. v., $t \in [a,b]$, arba vienas iš integralų $\mathbb{E}\int_a^b X(t)dt$, $\int_a^b \mathbb{E}X(t)dt$ yra baigtinis, tai*

$$\mathbb{E}\int_a^b X(t)\,dt = \int_a^b \mathbb{E}X(t)\,dt. \qquad \square$$

2.18 uždavinys. *Įrodyti, kad kiekvienam $T > 0$ Vynerio procesas $W \in \mathbb{H}^2[0,T]$.*

Sprendimas. Kadangi procesas W yra suderintas su $(\mathcal{F}_t)$ ir $W^2(t) \geq 0$, tai iš Fubini teoremos gauname, kad

$$\mathbb{E}\int_0^T W^2(t)\,dt = \int_0^T \mathbb{E}W^2(t)\,dt = \int_0^T t\,dt = \frac{T^2}{2} < \infty. \qquad \square$$

Tolydžių procesų stochastinį integralą galima apibrėžti panašiai kaip Styltjeso integralą. Svarbu yra tai, kad Styltjeso tipo integralinėse sumose integruojamo proceso reikšmes būtina imti ne bet kokiuose, o **kairiuosiuose** skaidinio intervalų galuose:

2.68 teiginys. *Tarkime, kad $X \in \mathbb{H}^2[0,T]$ – tolydus L^2 prasme atsitiktinis procesas, t. y. visiems $t \in [0,T]$*

$$\mathbb{E}X^2(t) < \infty \quad ir \quad \mathbb{E}\,|X(s) - X(t)|^2 \longrightarrow 0, \quad kai \quad s \to t.$$

Jei $\Delta^n = \left\{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = T\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, – tokia intervalo $[0,T]$ skaidinių seka, kad $|\,\Delta^n| = \max_i \Delta t_i = \max_i |\,t_{i+1}^n - t_i^n| \to 0$, tai

$$\int_0^T X(t)dW(t) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=0}^{k_n-1} X(t_i^n)\left[W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)\right].$$

2.19 uždavinys. *Patikrinti lygybę*

$$\int_0^T W(t)\,dW(t) = \frac{1}{2}\,W^2(t) - \frac{1}{2}\,T.$$

Sprendimas. Reikia tik patikrinti, ar W yra tolydus L^2 prasme procesas. Iš W apibrėžimo turime, kad $\mathbb{E}W^2(t) = t$, o $\mathbb{E}|\,W(s) - W(t)|^2 = |\,s - t| \to 0$, kai $s \to t$. Vadinasi, W yra tolydus L^2 prasme procesas. Tada iš ką tik pateikto teiginio ir anksčiau spręsto 2.17 uždavinio gausime norimą lygybę.

2.20 uždavinys. *Patikrinti lygybę*

$$\int_0^T t\,dW(t) = TW(T) - \int_0^T W(t)\,dt,$$

čia integralas dešinėje pusėje suprantamas kaip Rymano integralas kiekvienam $\omega \in \Omega$.

Sprendimas. Kadangi procesas $X(t) := t$ yra tolydi neatsitiktinė funkcija, tai belieka rasti ribą

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=0}^{n-1} t_i^n \left[W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)\right], \quad \text{čia} \quad t_i^n = \frac{iT}{n}.$$

Pasinaudosime tapatybe $c(b-a) = (db-ca)-b(d-c)$. Tada, imdami $d = t_{i+1}^n$, gauname

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1} t_i^n \left[W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)\right] = \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n-1} \left[t_{i+1}^n W(t_{i+1}^n) - t_i^n W(t_i^n)\right] - \sum_{i=0}^{n-1} W(t_{i+1}^n)\left[t_{i+1}^n - t_i^n\right] = \\
&\quad = TW(T) - \sum_{i=0}^{n-1} W(t_{i+1}^n)\left[t_{i+1}^n - t_i^n\right].
\end{aligned}$$

Remdamiesi Hiolderio nelygybe, gausime

$$\left(\sum_{i=1}^n |\,a_i|\right)^p \le n^{p-1}\sum_{i=1}^n |\,a_i|^p, \qquad p > 1.$$

(Hiolderio nelygybėje

$$\left(\sum_{k=1}^n |\,a_k b_k|\right) \le \left(\sum_{k=1}^n |\,a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |\,b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

imsime $b_k = 1$ ir $q = \frac{p}{p-1}$.) Todėl

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\sum_{i=0}^{n-1} W(t_{i+1}^n)\left[t_{i+1}^n - t_i^n\right] - \int_0^T W(t)dt\right|^2 = \\
&\quad = \mathbb{E}\left|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left[W(t_{i+1}^n) - W(t)\right] dt\right|^2 \le \\
&\quad \le n\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left|\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left[W(t_{i+1}^n) - W(t)\right] dt\right|^2.
\end{aligned}$$

Analogiškai

$$\left(\int_a^b |\,x(t)|\,dt\right)^p \le (b-a)^{p-1}\int_a^b |\,x(t)|^p\,dt.$$

Todėl

$$
\begin{aligned}
& n \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \left| \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} [W(t_i^n) - W(t)]\, dt \right|^2 \le \\
& \le n \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)\, \mathbb{E} \left(\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |\, W(t_{i+1}^n - W(t)|^2\, dt \right) = \\
& = n \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n) \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} (t_{i+1}^n - t)\, dt = \\
& = n \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n) \cdot \left[-\frac{(t_{i+1}^n - t)^2}{2} \right] \Bigg|_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} = \\
& = n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t_{i+1}^n - t_i^n)^3}{2} = n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T^3}{2n^3} = \frac{T^3}{2n} \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Vadinasi,

$$
\sum_{i=0}^{n-1} t_i^n \left[W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n) \right] \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} TW(T) - \int_0^T W(t) dt.
$$

2.69 teorema. *Tarkime, kad* $X \in \mathbb{H}^2[0,T]$ *ir*

$$
I(t) := \int_0^t X_s\, dW_s, \quad t \in [0,T].
$$

Tada egzistuoja suderinta proceso $I(t)$ *modifikacija* $\hat{I}(t)$*, kurios b. v. trajektorijos yra tolydžios. Ši modifikacija yra vienintelė.*

Toliau laikykime, kad $I(t)$ yra tolydus procesas.

2.70 teorema. 2.66 *teoremos teiginį* 2) *galima sustiprinti. Procesas* $I(t)$ *yra martingalas, t. y. kai* $s \le t$,

$$
\mathbb{E} \left(\int_0^t X(s)\, dW(s) |\, \mathcal{F}_s \right) = \int_0^s X(r)\, dW(r).
$$

2.21 uždavinys. *Tarkime,* W *yra standartinis Vynerio procesas ir* $b(t)$ *– neatsitiktinė, tolydi funkcija tokia, kad* $\int_0^T b^2(s)\, ds < \infty$ *bet kokiam fiksuotam* $T > 0$*. Tada*

$$
X(t) = \int_0^t b(s)\, dW(s)
$$

yra Gauso procesas su nuliniu vidurkiu $m(t) = 0$ *ir kovariacija*

$$
\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = \rho(s,t) = \int_0^{s \wedge t} b^2(u)\, du.
$$

Sprendimas. Reikia įrodyti, kad bet kokiam taškų rinkiniui $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, a. v. $(X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n))$ skirstinys yra normalusis. Pasinaudosime 2.25 teiginiu. Tuo tikslu skaidome intervalą $[0, t_k]$ taškais $0 = s_0^k < s_1^k < \ldots < s_m^k = t_k$ į dalinius intervalus ir sudarome sumą

$$X^m(t_k) = \sum_{i=1}^m b(s_i^k)\big[W(s_i^k) - W(s_{i-1}^k)\big].$$

Kadangi funkcija $b(s)$ – tolydi, tai iš 2.68 teiginio gausime, kad $X(t_k) = \text{l.i.m.}\, X^m(t_k)$, kai $m \to \infty$. A. d. $X^m(t_k)$ yra Gauso. Tai išplaukia iš normaliojo a. v. savybės c). Vadinasi, a. v. $(X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n))$ skirstinys bus normalusis. Tai gauname iš 2.25 teiginio. Vadinasi, X yra Gauso procesas.

Belieka rasti Gauso proceso X charakteristikas. Iš stochastinio integralo 2 savybės gauname, kad Gauso proceso X vidurkis lygus nuliniui. Skaičiuojant proceso X kovariaciją, pasinaudosime 2.70 teorema. Tarkime, kad $s < t$. Tuomet

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X(s), X(t)) &= \mathbf{E}\Big(\int_0^s b(u)\, dW(u)\Big)^2 \\
&\quad + \mathbf{E}\Big[\Big(\int_0^t b(u)\, dW(u) - \int_0^s b(u)\, dW(u)\Big) \int_0^s b(u)\, dW(u)\Big] \\
&= \int_0^s b^2(u)\, du \\
&\quad + \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\Big(\int_0^t b(u)\, dW(u) - \int_0^s b(u)\, dW(u) \mid \mathcal{F}_s^W\Big) \int_0^s b(u)\, dW(u)\Big] \\
&= \int_0^s b^2(u)\, du
\end{aligned}$$

Vadinasi, proceso X kovariacija turi norimą pavidalą. $\square$

Dabar suformuluosime bendresnius teiginius, kada stochastinis integralas yra Gauso procesas.

2.71 teorema. *Tarkime, W yra standartinis Vynerio procesas, $a(t)$ ir $b(t)$ yra neatsitiktinės funkcijos. Apibrėžkime*

$$X(t) = \int_0^t b(s)\, dW(s), \qquad Y(t) = \int_0^t a(s) X(s)\, ds.$$

Tada Y yra Gauso procesas su nuliniu vidurkiu $m(t) = 0$ ir kovariacija

$$\operatorname{cov}(Y(s), Y(t)) = \rho(s,t) = \int_0^{s\wedge t} b^2(v) \Big(\int_v^s a(y)\, dy\Big)\Big(\int_v^t a(y)\, dy\Big) dv.$$

2.72 pastaba. *Jei $b(t)$ yra atsitiktnė funkcija, tai X nebūtinai yra Gauso procesas.*

2.22 uždavinys. *Įrodyti, kad*

$$Y(t) = \int_0^t W(s)\, dW(s)$$

priklauso $\mathbb{H}^2[0,T]$ bet kokiems $T > 0$. Procesas Y nėra Gauso.

Sprendimas. Reikia parodyti, kad

$$\mathbb{E}\int_0^T Y^2(t)\,dt < \infty.$$

Iš Fubini teoremos ir stochastinio integralo savybių gauname, kad

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T & Y^2(t)\,dt = \\ &= \mathbb{E}\int_0^T \Big(\int_0^t W(s)\,dW(s)\Big)^2 dt = \int_0^T \mathbb{E}\Big(\int_0^t W(s)\,dW(s)\Big)^2 dt = \\ &= \int_0^T \Big(\mathbb{E}\int_0^t W^2(s)\,ds\Big)\,dt = \int_0^T \Big(\int_0^t s\,ds\Big)\,dt = \\ &= \int_0^T \frac{t^2}{2}\,dt = \frac{T^3}{6} < \infty.\end{aligned}$$

Iš 2.19 uždavinio sprendimo žinome, kad fiksuotam $t > 0$ ats. proc. Y reikšmė $Y(t) = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}t$. Kadangi a. d. $t^{-1}\cdot W^2(t)$ skirstinys nėra normalusis o χ^2, tai ir $Y(t)$ nėra normalusis.

2.11 Stochastinis diferencialas ir Ito formulė

Bet kokiai tolydžiai diferencijuojamai funkcijai $x(t)$ tokiai, kad $x(0) = 0$, teisinga lygybė

$$x^2(T) = 2\int_0^T x(t)\,dx(t) = 2\int_0^T x(t)\,x'(t)\,dt. \tag{2.16}$$

Praeitame skyriuje standartiniam Vynerio procesui mes įrodėme lygybę

$$W^2(T) = \int_0^T dt + 2\int_0^T W(t)\,dW(t). \tag{2.17}$$

Matome, kad (2.16) ir (2.17) skiriasi $\int_0^T dt$ nariu.

(2.16) lygybę galime gauti tiesiogiai, arba iš Niutono-Leibnico formulės

$$F(x_T) - F(x_0) = \int_0^T F'(x_t)\,dx_t,$$

teisingos tolydžioms baigtinės variacijos funkcijoms x ir funkcijoms $F \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$. (2.17) lygybė gali būti gauta iš stochastinio Niutono-Leibnico formulės analogo, vadinamosios Ito formulės. Prieš formuluodami Ito formulę įvesime **Ito proceso** sąvoką.

2.73 apibrėžimas. *Stochastinis procesas $X = \{X(t), t \in [0,T]\}$ vadinamas **Ito procesu**, jei jo trajektorijos yra b. v. tolydžios ir jį galime užrašyti taip:*

$$X(T) = X(0) + \int_0^T a(t)\,dt + \int_0^T b(t)\,dW(t) \quad b.\ v., \tag{2.18}$$

čia procesas $b(t) = b(t,\omega)$ priklauso $\mathbb{H}^2[0,T]$ klasei visiems $T > 0$, o procesas $a(t) = a(t,\omega)$ yra suderintas su filtracija $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$, apibrėžta praeitame skyrelyje, ir toks, kad

$$\int_0^T |\,a(t)|\,dt < \infty \quad \textit{b. v. su visais } T > 0. \tag{2.19}$$

Visų suderintų procesų $a(t)$, tenkinančių sąlygą (2.19) *kokiam nors $T > 0$, klasė bus žymima $\mathbb{L}^1_T$.*

Jei X yra (2.18) pavidalo Ito procesas, tai jis kartais užrašomas trumpiau

$$dX(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dW(t).$$

$dX(t)$ yra vadinamas proceso $X(t)$ **stochastiniu diferencialu**. Reikėtų pabrėžti, kad stochastinis diferencialas neturi apibrėžtos matematinės prasmės. Tai tik paprastesnis (2.18) lygties užrašymas.

1 pavyzdys. Vynerio procesą $W(t)$ galima užrašyti taip:

$$W(T) = \int_0^T dW(t).$$

Vadinasi, Vynerio procesas W yra Ito procesas, nes jis turi (2.18) pavidalą su $a(t) = 0$ ir $b(t) = 1$, $X_0 = 0$. Funkcijos $a(t) \in \mathbb{L}^1_T$, o $b(t) \in \mathbb{H}^2_T$.

2 pavyzdys. Kiekvienas procesas, kurį galime užrašyti

$$X(T) = X(0) + \int_0^T a(t)\,dt,$$

čia $a(t) \in \mathbb{L}^1_T$ kiekvienam $T \geq 0$, yra Ito procesas. Atskiru atveju kiekvienas determinuotasis tokio pavidalo procesas su neatsitiktine funkcija $a(t)$ yra Ito procesas.

3 pavyzdys. Kadangi $a(t) = 1$ priklauso klasei $\mathbb{L}^1_T$ ir $b(t) = 2W(t)$ priklauso $\mathbb{H}^2_T$ kiekvienam $T > 0$, tai

$$W^2(T) = \int_0^T dt + 2\int_0^T W(t)\,dW(t)$$

yra Ito procesas.

2.74 teorema (Ito formulė, supaprastintas variantas)**.** *Tarkime, kad $F(t,x)$ yra reali dviejų kintamųjų funkcija, turinti tolydžias dalines išvestines $F'_t(t,x)$, $F'_x(t,x)$ ir $F''_{xx}(t,x)$ visiems $t \geq 0$ ir $x \in \mathbb{R}$. Tarkime, kad procesas $F'_x(t,W(t))$ priklauso $\mathbb{H}^2_T$ visiems $T > 0$. Tuomet $F(t,W(t))$ yra toks Ito procesas, kad*

$$\begin{aligned} &F(T,W(T)) - F(0,W(0)) = \\ &\quad = \int_0^T \left[F'_t(t,W(t)) + \frac{1}{2}\,F''_{xx}(t,W(t))\right] dt + \int_0^T F'_x(t,W(t))\,dW(t) \quad \textit{b. v.} \end{aligned}$$

Diferencialiniu pavidalu

$$dF(t,W(t)) = \left[F'_t(t,W(t)) + \frac{1}{2}F''_{xx}(t,W(t))\right] dt + F'_x(t,W(t))\,dW(t).$$

2.75 pastaba. *Dviejų kintamųjų funkcijos $F(t,x)$ pilnas diferencialas užrašomas*

$$dF(t,x(t)) = F'_t(t,x(t))\,dt + F'_x(t,x(t))\,dx(t),$$

čia $x(t)$ yra diferencijuojama funkcija.

4 pavyzdys. Imkime $F(t,x) = x^2$. Tada

$$F'_t(t,x) = 0, \quad F'_x(t,x) = 2x \quad \text{ir} \quad F''_{xx}(t,x) = 2.$$

Tuomet iš Ito formulės

$$W^2(T) = \int_0^T dt + 2\int_0^T W(t)\,dW(t).$$

5 pavyzdys. Imkime $F(t,x) = x^3$. Tada

$$F'_t(t,x) = 0, \quad F'_x(t,x) = 3x^2 \quad \text{ir} \quad F''_{xx}(t,x) = 6x.$$

Tuomet

$$W^3(T) = 3\int_0^T W(t)\,dt + 3\int_0^T W^2(t)\,dW(t).$$

2.23 uždavinys. *Įrodyti, kad eksponentinis martingalas*

$$X(t) = e^{W(t)-\frac{t}{2}}$$

yra Ito procesas ir tenkina lygybę

$$dX(t) = X(t)\,dW(t).$$

Sprendimas. Imkime $F(t,x) = e^x e^{-t/2}$. Tada

$$F'_t(t,x) = -\frac{1}{2}\,e^x e^{-t/2}, \quad F'_x(t,x) = e^x e^{-t/2} \quad \text{ir} \quad F''_{xx}(t,x) = e^x e^{-t/2}.$$

Kadangi $X(t) = e^{W(t)}e^{-t/2}$, tai iš Ito formulės

$$\begin{aligned}dX(t) &= dF(t,W(t)) = \\ &= \left[F'_t(t,W(t)) + \frac{1}{2}F''_{xx}(t,W(t))\right]dt + F'_x(t,W(t))\,dW(t) = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\,X(t) + \frac{1}{2}\,X(t)\right)dt + X(t)\,dW(t) = X(t)\,dW(t).\end{aligned}$$

Tam, kad $X(t) = e^{W(t)}e^{-t/2}$ būtų Ito procesas, pakanka parodyti, kad $X(t)$ priklauso $\mathbb{H}^2_T$ klasei kiekvienam $T > 0$. Aišku, kad $X(t)$ yra suderintas su $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$. Toliau

$$\mathbb{E}\int_0^T |\,X(t)|^2\,dt = \int_0^T \mathbb{E}(e^{2W(t)} \cdot e^{-t})dt,$$

$$\mathbb{E}e^{2W(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2t}(x-2t)^2+2t} dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{2t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-2t)^2}{2t}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{2t}.$$

Todėl

$$\mathbb{E} \int_0^T |X(t)|^2 \, dt = \int_0^T e^t dt = e^T - 1 < \infty.$$

Vadinasi, $X(t) \in \mathbb{H}_T^2$.

2.76 teorema (Ito formulė, bendrasis atvejis). *Tarkime, $X(t)$ yra Ito procesas. Tarkime, kad $F(t,x)$ yra reali funkcija, turinti tolydžias išvestines $F_t'(t,x)$, $F_x'(t,x)$ ir $F_{xx}''(t,x)$ visiems $t \geq 0$ ir $x \in \mathbb{R}$. Be to, tarkime, kad procesas $b(t)F_x'(t,x)$ priklauso $\mathbb{H}_T^2$ visiems $T > 0$. Tuomet $F(t, X(t))$ yra toks Ito procesas, kad*

$$dF(t,X(t)) = \left[F_t'(t,X(t)) + F_x'(t,X(t))a(t) + \frac{1}{2}F_{xx}''(t,X(t))b^2(t)\right] dt +$$
$$+ F_x'(t,X(t))b(t)\, dW(t).$$

2.24 uždavinys. *Tarkime, kad $\alpha > 0$ ir $\sigma \in \mathbb{R}$ yra fiksuoti. Apibrėžkime*

$$Y(t) = \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s}\, dW(s).$$

Įrodykite, kad $Y(t)$ tenkina lygybę

$$dY(t) = -\alpha Y(t) dt + \sigma\, dW(t). \tag{2.20}$$

Sprendimas. Pažymėkime $F(t,x) = e^{-\alpha t}x$. Tada

$$F_t'(t,x) = -\alpha e^{-\alpha t}x, \quad F_x'(t,x) = e^{-\alpha t} \quad \text{ir} \quad F_{xx}''(t,x) = 0.$$

Procesas

$$X(t) = \sigma \int_0^t e^{\alpha s}\, dW(s)$$

yra Ito procesas. Funkcija

$$b(t)F_x'(t,x) = \sigma e^{\alpha t} \cdot e^{-\alpha t} = \sigma$$

yra aprėžta. Todėl $b(t)F_x'(t,x)$ priklauso $\mathbb{H}_T^2$ klasei kiekvienam $T > 0$ ir galime taikyti Ito formulę. Gauname

$$dY(t) = d\left(e^{-\alpha t}X(t)\right) =$$
$$= -\alpha e^{-\alpha t}X(t)\, dt + e^{-\alpha t}\sigma e^{\alpha t}\, dW(t) = -\alpha Y(t)\, dt + \sigma\, dW(t).$$

Vadinasi, įrodėme, kad Y(t) tenkina lygtį (2.20).

Procesas

$$Y(t) = \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s}\, dW(s).$$

vadinamas Ornšteino-Ulenbeko procesu.

2.25 uždavinys. *Įrodyti, kad Ornšteino-Ulenbeko procesas Y vienu metu yra ir Gauso ir Markovo procesas.*

Sprendimas. 1) Įrodysime, kad Ornšteino-Ulenbeko procesas yra Gauso procesas ir rasime jo vidurkį ir kovariaciją. Iš 2.21 uždavinio tvirtinimo žinome, kad $X(t) = \int_0^t e^{\alpha s}\, dW(s)$ yra Gauso procesas su nuliniu vidurkiu ir kovariacija

$$\operatorname{cov}(X(s), X(t)) = \int_0^{s\wedge t} e^{2\alpha u}\, du = \frac{e^{2\alpha(s\wedge t)} - 1}{2\alpha}.$$

Aišku, kad $Y(t)$ irgi bus Gauso procesas su nuliniu vidurkiu ir kovariacija

$$\operatorname{cov}(Y(s), Y(t)) = e^{-\alpha(t+s)}\, \frac{e^{2\alpha s} - 1}{2\alpha} = \frac{e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t+s)}}{2\alpha}, \qquad \text{jei } s \le t.$$

Pastebėsime, kad bendru atveju

$$\operatorname{cov}(Y(s), Y(t)) = \frac{e^{-\alpha|t-s|} - e^{-\alpha(t+s)}}{2\alpha}.$$

2) Dabar įrodysime, kad Ornšteino-Ulenbeko procesas yra Markovo procesas. Pakanka patikrinti 2.41 teiginio sąlygą, t.y., kad autokoreliacinė funkcija $\rho(s, t)$ tenkina savybę

$$\rho(t_1, t_3) = \frac{\rho(t_1, t_2)\rho(t_2, t_3)}{\rho(t_2, t_2)}, \tag{2.21}$$

čia $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$, $t_1 < t_2 < t_3$. Nagrinėjamu atveju

$$\rho(t_1, t_2) = e^{-\alpha(t_1+t_2)}\, \frac{e^{2\alpha t_1} - 1}{2\alpha}, \quad \rho(t_2, t_3) = e^{-\alpha(t_2+t_3)}\, \frac{e^{2\alpha t_2} - 1}{2\alpha},$$
$$\rho(t_2, t_2) = \frac{1 - e^{-2\alpha t_2}}{2\alpha} = e^{-2\alpha t_2}\, \frac{e^{2\alpha t_2} - 1}{2\alpha}, \quad \rho(t_1, t_3) = e^{-\alpha(t_1+t_3)}\, \frac{e^{2\alpha t_1} - 1}{2\alpha}.$$

Vadinasi, (2.21) patenkinta. Todėl Ornšteino-Ulenbeko procesas yra Markovo procesas.

2.12 Stochastinės diferencialinės lygtys

Dabar nagrinėsime integralinę lygtį

$$X(t) = \xi_0 + \int_0^t f(s, X(s))\, ds + \int_0^t g(s, X(s))\, dW(s), \quad t \ge 0. \tag{2.22}$$

Iš dalies dėl istorinių priežasčių, bet labiau dėl praktinio patogumo ji paprastai užrašoma formaliu diferencialiniu pavidalu

$$dX(t) = f(t, X(t))\, dt + g(t, X(t))\, dW(t), \quad X_0 = \xi_0. \tag{2.23}$$

Abi lygtys vadinamos **stochastinėmis diferencialinėmis lygtimis** (SDL), nors tiksliau būtų vartoti žodį **integralinė**.

2.77 apibrėžimas. *Ito procesas* $X(t), t \geq 0$ *vadinamas stochastinės diferencialinės lygties* (2.23) ***sprendiniu****, jei* ξ_0 *yra* $\mathcal{F}_0$*-matus a. d., procesai* $f(t, X(t))$ *ir* $g(t, X(t))$ *priklauso atitinkamai* $\mathbb{L}_T^1$ *ir* $\mathbb{H}_T^2$ *klasėms ir visiems* $t \geq 0$ *jis tenkina* (2.22) *lygtį* (*su tikimybe* 1).

2.78 teorema. *Tarkime, kad* f *ir* g *tenkina Lipšico sąlygą, t. y. egzistuoja tokia konstanta* $C > 0$*, kad visiems* $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\,f(t,x) - f(t,y)| \leq C|\,x-y| \quad ir \quad |\,g(t,x) - g(t,y)| \leq C|\,x-y|\,.$$

Tada jos tenkina ir tiesinio augimo sąlygą

$$|\,f(t,x)| + |\,g(t,x)| \leq D(1+|\,x|\,), \quad D \text{ – konstanta.}$$

Be to, tarkime, kad ξ_0 *yra* $\mathcal{F}_0$*-matus a. d. Tuomet stochastinė diferencialinė lygtis* (2.23) *turi sprendinį* $\{X(t), t \geq 0\}$*, kuris priklauso Ito procesų klasei. Sprendinys yra vienintelis.* (*Jei* $\{\eta(t), t \geq 0\}$ *yra kitas Ito procesas, tenkinantis* (2.23) *lygtį, tai šie du procesai sutampa b. v., t. y.* $\mathbb{P}\,(X(t) = \eta(t), \forall t \geq 0) = 1.$)

2.79 apibrėžimas. ***Tiesine stochastine diferencialine*** (*TSDL*) *vadinama lygtis*

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))\,dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))\,dW_t\,, \quad X_0 = \xi_0,$$

čia a_i *ir* b_i *– neatsitiktinės funkcijos. Jei* a_i *ir* b_i *– konstantos, tai TSDL vadinama* ***autonomine****; jei* $a_2 = b_2 = 0$*, tai lygtis vadinama* ***homogenine****.*

2.26 uždavinys. *Tarkime, kad* $w(t)$*,* $t \geq 0$*, yra tokia deterministinė funkcija iš klasės* $C^1(\mathbb{R})$*, kad* $w(0) = 0$*. Išspręsti parpastąją diferencialinę lygtį*

$$dx(t) = ax(t)\,dt + bx(t)\,dw(t) \tag{2.24}$$

su pradine sąlyga $x(0) = x_0$ (*rašome* $dw(t)$ *vietoje* $w'(t)\,dt$*, kad būtų analogija su stochastinėmis diferencialinėmis lygtimis*).

Sprendimas. Perrašome (2.24) lygtį

$$dx(t) = \left[ax(t) + bx(t)w'(t)\right]\,dt = x(t)\left[a + bw'(t)\right]\,dt.$$

Atskiriame kintamuosius

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = \left[a + bw'(t)\right]\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln|\,x(t)| = at + bw(t) + c.$$

Kadangi $x(0) = x_0$, tai

$$\ln|\,x(t)| = at + bw(t) + ln|\,x_0|$$

ir

$$|\,x(t)| = \exp\{at + bw(t) + \ln|\,x_0|\,\} = |\,x_0| \cdot e^{at+bw(t)}.$$

Vadinasi,

$$x(t) = x_0 \cdot e^{at+bw(t)}. \tag{2.25}$$

Matome, kad lygties (2.24) sprendinys turi pavidalą (2.25). □

Pakeiskime lygybėje (2.25) neatsitiktinę funkciją $w(t)$ atsitiktine. Imkime vietoj $w(t)$ Vynerio procesą $W(t)$. Dabar išsiaiškinsime, kokios stochastinės lygties sprendiniu yra šis atsitiktinis procesas.

2.27 uždavinys. *Įrodyti, kad procesas*

$$X(t) = x_0 \cdot e^{at+bW(t)}$$

yra tiesinės stochastinės diferencialinės lygties

$$dX(t) = \left(a + \frac{b^2}{2}\right) X(t)\,dt + bX(t)\,dW(t)$$

su pradine sąlyga $X(0) = x_0$ sprendinys.

Sprendimas. Pažymėkime $Y(t) = at + bW(t)$. Tai Ito procesas. Imkime $F(x) = x_0 \cdot e^x$. Iš Ito formulės

$$\begin{aligned} dF(Y(t)) &= \left[F'_x(Y(t)) \cdot a + \frac{1}{2} F''_{xx}(Y(t)) \cdot b^2\right] dt + F'_x(Y(t)) \cdot b\,dW(t) = \\ &= \left[a\,x_0 \exp\{Y(t)\} + \frac{b^2}{2}\,x_0 \exp\{Y(t)\}\right] dt + b\,x_0 \cdot \exp\{Y(t)\}\,dW(t). \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$dX(t) = \left(a + \frac{b^2}{2}\right) X(t)\,dt + bX(t)\,dW(t)$$

ir

$$X(0) = x_0 \cdot \exp\{Y_0\} = x_0. \qquad \square$$

Galima įrodyti šiek tiek bendresnį teiginį, t. y. procesas

$$X(t) = X_0 \cdot e^{at+bW(t)}$$

yra stochastinės diferencialinės lygties

$$dX(t) = \left(a + \frac{b^2}{2}\right) X(t)\,dt + bX(t)\,dW(t),$$

su pradine sąlyga $X(0) = X_0$, sprendinys. Šis sprendinys yra vadinamas **geometriniu Brauno judesiu**.

2.28 uždavinys. *Įrodyti, kad tiesinė stochastinė diferencialinė lygtis*

$$dX(t) = aX(t)\,dt + bX(t)\,dW(t) \tag{2.26}$$

su pradine sąlyga $X(0) = X_0$ turi vienintelį sprendinį

$$X(t) = X_0 \cdot e^{\left(a-\frac{b^2}{2}\right)t+bW(t)}$$

Sprendimas. Stochastinę diferencialinę lygtį (2.26) galima perrašyti

$$dX(t) = \left(c + \frac{b^2}{2}\right) X(t)\,dt + bX(t)\,dW(t),$$

čia $c = a - \frac{b^2}{2}$. Iš ankstensio uždavinio gauname, kad šios lygties sprendinys yra

$$X(t) = X(t) = X_0 \cdot e^{ct+bW(t)} = X_0 \cdot e^{\left(a-\frac{b^2}{2}\right)t+bW(t)}.$$

Vienatis gaunama iš teoremos. □

2.29 uždavinys. *Rasti lygties*

$$dX_t = (b - aX(t))\,dt + \sigma\,dW(t), \quad X(0) = x_0, \quad t \geq 0, \quad \sigma \geq 0. \tag{2.27}$$

sprendinį.

2.80 pastaba. *Nagrinėjamos lygties sprendinys vadinamas Ornšteino-Ulenbeko tipo procesu. Paprastai Ornšteino-Ulenbeko procesu vadinamas procesas, kuriam $b = 0$, o pateiktas procesas yra Vasiceko. Kaip jau žinome, tai $X(t) = \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\,dW(s)$, jei $b = 0$.*

Sprendimas. Pažymėkime $F(t, x) = x \cdot e^{at}$. Taikysime Ito formulę procesui $F(t, X(t))$. Randame išvestines

$$F'_t(t, x) = x \cdot ae^{at}, \qquad F'_x(t, x) = e^{at}, \qquad F''_{xx}(t, x) = 0.$$

Gauname

$$\begin{aligned} X(t) \cdot e^{at} &= F(t, X(t)) = F(0, X_0) + \int_0^t \left[F'_t(t, X(s)) + F'_x(t, X(s))(b - aX(s))\right] ds \\ &\quad + \int_0^t F'_x(t, X(s))\sigma dW(s) \\ &= x_0 + \int_0^t \left[aX(s)e^{as} + e^{as}(b - aX(s))\right] ds + \int_0^t \sigma e^{as} dW(s) \\ &= x_0 + \frac{b}{a}\left(e^{at} - 1\right) + \sigma \int_0^t e^{as} dW(s). \end{aligned}$$

Vadinasi,

$$X(t) = \frac{b}{a} + \left(x_0 - \frac{b}{a}\right) \cdot e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}\,dW(s), \quad t \geq 0. \qquad \square$$

Ito formulės pagalba radome kai kurių tiesinių lygčių sprendinius. Sugrįškime prie bendrųjų TSDL

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))\,dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))\,dW_t\,, \quad X_0 = x_0, \tag{2.28}$$

čia a_i ir b_i (i=1,2) – neatsitiktinės funkcijos, apibrėžtos kiekviename baigtiniame intervale $[0, T]$ (pavyzdžiui tolydžios). Rasime jos sprendinį.

2.81 teiginys. *Nagrinėkime TSDL* (2.28) *atsirą atvejį*

$$dY_t = a_1(t)Y_t\,dt + b_1(t)Y_t\,dW_t\,, \quad Y_0 = 1. \tag{2.29}$$

Ši lygtis turi sprendinį

$$\Phi_t = \exp\Big\{\int_0^t \Big(a_1(s) - \frac{1}{2}\,b_1^2(s)\Big)ds + \int_0^t b_1(s)\,dW_s\Big\}, \qquad t \geq 0.$$

Procesas Φ *vadinamas fundamentaliuoju* (2.29) *lygties sprendiniu.*

Įrodymas. Pažymėkime

$$Z_t = \int_0^t \Big(a_1(s) - \frac{1}{2}\,b_1^2(s)\Big)ds + \int_0^t b_1(s)\,dW_s,$$

taigi $\Phi_t = e^{Z_t}$, $t \geq 0$. Z yra Ito procesas. Tada, remiantis Ito formule

$$\begin{aligned} d\Phi_t =& e^{Z_t}\Big(a_1(t) - \frac{1}{2}\,b_1^2(t)\Big)dt + e^{Z_t}b_1(t)\,dW_t + \frac{1}{2}\,e^{Z_t}b_1^2(t)\,dt = \\ =& e^{Z_t}a_1(t)\,dt + e^{Z_t}b_1(t)\,dW_t = a_1(t)\Phi_t\,dt + b_1(t)\Phi_t\,dW_t. \end{aligned}$$

Pradinė sąlyga $\Phi_0 = 1$ akivaizdžiai tenkinama.

2.82 teiginys. *Atsitiktinis procesas* $\Phi_t^{-1} = e^{-Z_t}$*,* $t \geq 0$*, yra TSDL*

$$dY_t = \big(-a_1(t) + b_1^2(t)\big)Y_t\,dt - b_1(t)Y_t\,dW_t\,, \quad Y_0 = 1,$$

sprendinys.

Įrodymas. Patikriname analogiškai:

$$\begin{aligned} d\Phi_t^{-1} =& -\Big[e^{-Z_t}\Big(a_1(t) - \frac{1}{2}\,b_1^2(t)\Big)dt + e^{Z_t}b_1(t)\,dW_t\Big] + \frac{1}{2}\,e^{-Z_t}b_1^2(t)\,dt = \\ =& e^{-Z_t}\big(-a_1(t) + b_1^2(t)\big)dt - e^{-Z_t}b_1(t)\,dW_t \\ =& \big(-a_1(t) + b_1^2(t)\big)\Phi_t^{-1}\,dt - b_1(t)\Phi_t^{-1}\,dW_t. \end{aligned}$$

Pradinė sąlyga $\Phi_0^{-1} = 1$ taip pat akivaizdžiai tenkinama.

2.83 teiginys. *(Integravimo dalimis formulė) Sakykime,* X *ir* Y *yra Ito procesai intervale* $[0,T]$*, t. y.*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\,ds + \int_0^t H_s\,dW_s \quad \textit{ir} \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \widetilde{K}_s\,ds + \int_0^t \widetilde{H}_s\,dW_s.$$

Tada

$$\begin{aligned} X_tY_t =& X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \langle X,Y\rangle_t \\ =& X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \int_0^t H_s\widetilde{H}_s\,ds, \qquad t \in [0,T] \end{aligned}$$

arba diferencialiniu pavidalu

$$d(X_sY_s) = X_s dY_s + Y_s dX_s + (H_s\widetilde{H}_s)\,ds.$$

Atskiru atveju, kai bent vienas iš procesų yra ***reguliarus****, t.y.* $H = 0$ *arba* $\widetilde{H} = 0$*, šios formulės virsta įprastinėmis integravimo dalimis formulėmis:*

$$\int_0^t X_s\,dY_s = X_tY_t - X_0Y_0 - \int_0^t Y_s\,dX_s, \qquad X\,dY = d(XY) - Y\,dX.$$

2.84 teorema. *Atsitiktinis procesas*

$$X_t = \Phi_t\Big[x_0 + \int_0^t \big(a_2(s) - b_1(s)b_2(s)\big)\Phi_s^{-1}\,ds + \int_0^t b_2(s)\Phi_s^{-1}\,dW_s\Big], \qquad t \ge 0,$$

yra (2.28) *sprendinys.*

Įrodymas. Pasinaudoję integravimo dalimis formule (2.28) lygties sprendiniui X_t ir procesui $Y_t = \Phi_t^{-1}$ bei 2.82 teiginiu, gauname

$$\begin{aligned}
d(X_t\Phi_t^{-1}) =& X_t d\Phi_t^{-1} + \Phi_t^{-1}dX_t + d\langle X_t, \Phi_t^{-1}\rangle \\
=& X_t\big(-a_1(t) + b_1^2(t)\big)\Phi_t^{-1}dt + X_t\big(-b_1(t)\Phi_t^{-1}\big)dW_t \\
& + \Phi_t^{-1}\big(a_1(t)X_t + a_2(t)\big)dt + \Phi_t^{-1}\big(b_1(t)X_t + b_2(t)\big)dW_t \\
& + \big(b_1(t)X_t + b_2(t)\big)\big(-b_1(t)\Phi_t^{-1}\big)dt \\
=& \big(a_2(t) - b_1(t)b_2(t)\big)\Phi_t^{-1}\,dt + b_2(t)\Phi_t^{-1}\,dW_t.
\end{aligned}$$

Integruodami gautą reiškinį ir atsižvelgdami į tai, kad $\Phi_0^{-1}X_0 = x_0$, gauname

$$\Phi_t^{-1}X_t = x_0 + \int_0^t \big(a_2(s) - b_1(s)b_2(s)\big)\Phi_s^{-1}\,ds + \int_0^t b_2(s)\Phi_s^{-1}\,dW_s, \qquad t \ge 0.$$

Lieka padauginti abi puses iš Φ_t. $\square$

2.30 uždavinys. *Rasti lygties*

$$dX_t = -\frac{X(t)}{T-t}\,dt + dW(t), \quad \textit{kai } 0 \le t < T,\ X(0) = 0. \tag{2.30}$$

sprendinį.

2.85 pastaba. *Šios lygties sprendinys vadinamas* ***Brauno tiltu****.*

Sprendimas. Nagrinėjama lygtis yra tiesinė. Jos koeficientai

$$a_1(t) = -\frac{1}{T-t}, \quad a_2(t) = 0, \quad b_1(t) = 0, \quad b_2(t) = 1.$$

Kadangi

$$\begin{aligned}\Phi_t =&\exp\Big\{-\int_0^t \frac{1}{T-s}\,ds\Big\} = \exp\{\ln|T-t| - \ln T\} = \exp\Big\{\ln\Big(1-\frac{t}{T}\Big)\Big\}\\ =&\Big(1-\frac{t}{T}\Big)\end{aligned}$$

ir

$$\Phi_t^{-1} = \exp\Big\{\int_0^t \frac{1}{T-s}\,ds\Big\} = \Big(1-\frac{t}{T}\Big)^{-1},$$

tai sprendinys

$$\begin{aligned}X_t =&x_0\Big(1-\frac{t}{T}\Big) + \Big(1-\frac{t}{T}\Big)\int_0^t \Big(1-\frac{s}{T}\Big)^{-1} dW_s\\ =&x_0\Big(1-\frac{t}{T}\Big) + (T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s}\,dW_s, \qquad \text{kai } 0 \le t < T.\end{aligned}$$

Stochastinio integralo pointegrinė funkcija yra neatsitiktinė ir $\int_0^t ds/(T-s)^2 < \infty$ bet kokiam $t < T$. Todėl $\int_0^t \frac{1}{T-s}\,dW_s$ yra martingalas ir dar daugiau – Gauso procesas. Taigi $X(t)$ yra Gauso procesas, kurio pradinė reikšmė $X(0) = x_0$. Rasime sprendinio X reikšmę taške T. Įrodysime, kad $X(T) = 0$.

Pasinaudosime integravimo dalimis formule, kuri nagrinėjamu atveju yra visai kaip klasikinė integravimo dalimis formulė, kai Ito procesas neturi atsitiktinės dalies. Taigi

$$\int_0^t f_s\,dW_s = f_t W_t - \int_0^t W_s\,df_s,$$

čia f_s neatsitiktinė funkcija. Imkime $f_s = (T-s)^{-1}$ ir $df_s = ds/(T-s)^2$. Tada

$$\int_0^t \frac{1}{T-s}\,dW_s = \frac{W_t}{T-t} - \int_0^t \frac{W_s}{(T-s)^2}\,ds,$$

kai $t < T$, ir

$$(T-t)\int_0^t \frac{dW_s}{T-s} = W_t - (T-t)\int_0^t \frac{W_s}{(T-s)^2}\,ds.$$

Galima įrodyti, kad

$$\lim_{t\uparrow T}(T-t)\int_0^t \frac{g(s)}{(T-s)^2}\,ds = g(T),$$

čia $g(s)$ yra tolydi funkcija. Pasinaudosime šiuo faktu. Imkime $g(s) = W(s)$. Tada

$$\lim_{t\uparrow T}(T-t)\int_0^t \frac{dW_s}{T-s} = 0.$$

Vadinasi, $X(T) = 0$. $\square$

2.86 pastaba. *Paprastai Brauno tiltu vadinamas procesas B^0, jei $B^0(t) = W(t) - tW(1)$, $0 \le t \le 1$, čia W – Vynerio procesas. Nesunku įrodyti, kad Brauno tiltas yra Gauso procesas su nuliniu vidurkiu ir autokoreliacine funkcija $\mathbf{E}B_t^0 B_s^0 = s \wedge t - st$. Be to, procesų B^0 ir X, $X(1) = 0$, skirstiniai sutampa.*

Išreikštiniu pavidalu SDL sprendinį galime gauti ne tik tiesiniu atveju. Nagrinėkime tokio pavidalo SDL:

$$dX(t) = \frac{1}{2}\, b(X(t))b'(X(t))\, dt + b(X(t))\, dW(t), \quad X(0) = x_0, \quad b \in C^1(\mathbb{R}). \tag{2.31}$$

Kadangi $b(x)$ yra diferencijuojama funkcija, tai šios lygties sprendinys ieškomas pavidalu

$$X(t) = h^{-1}(W(t) + h(x_0)),$$

čia h^{-1} yra funkcijos

$$h(x) = \int_0^x \frac{ds}{b(s)}$$

atvirkštinė funkcija.

2.31 uždavinys. *Rasti lygties*

$$dX(t) = -\frac{1}{2}\, a^2 X(t)\, dt + a\sqrt{1 - X^2(t)}\, dW(t), \qquad X_0 = x_0 \tag{2.32}$$

sprendinį.

Sprendimas. Pažymėję $b(x) = a\sqrt{1-x^2}$, lygtį (2.32) galime užrašyti (2.31) pavidalu, nes

$$b'(x) = \frac{ax}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ir} \quad b(x)b'(x) = -a^2 x.$$

Tada mūsų nagrinėjamos lygties (2.32) sprendinio ieškome naudodami transformaciją

$$h(x) = \int_0^x \frac{ds}{a\sqrt{1-s^2}} = \frac{1}{a}\arcsin x.$$

Funkcijai $h(x)$ atvirkštinė funkcija yra $h^{-1}(x) = \sin(ax)$. Vadinasi, lygties (2.32) sprendinys yra

$$X(t) = \sin\left(aW(t) + \arcsin x_0\right).$$

Lygtis (2.32) netenkina sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygų, nes funkcija $b(x) = a\sqrt{1-x^2}$ nėra Lipšico.

2.32 uždavinys. *Rasti lygties*

$$dX(t) = -\sin X(t)\cos^3 X(t)\, dt + \cos^2 X(t)\, dW(t), \qquad X_0 = x_0 \tag{2.33}$$

sprendinį.

Sprendimas. Pažymėję $b(x) = \cos^2 x$, lygtį (2.33) galime užrašyti (2.31) pavidalu, nes

$$b'(x) = -2\cos x \sin x \quad \text{ir} \quad b(x)b'(x) = -2\cos^3 x \sin x.$$

Tada mūsų nagrinėjamos lygties (2.33) sprendinio ieškome naudodami transformaciją

$$h(x) = \int_0^x \frac{ds}{\cos^2 s} = \mathrm{tg}\ (x).$$

Funkcijai $h(x)$ atvirkštinė funkcija yra $h^{-1}(x) = \mathrm{arctg}\ x$. Vadinasi, lygties (2.33) sprendinys yra

$$X(t) = \mathrm{arctg}\,(W(t) + \mathrm{tg}\ x_0).$$

2.13 Stochastinių diferencialinių lygčių skaitinis sprendimas

Nagrinėkime stochastinę diferencialinę lygtį

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\,dW(s), \quad t \geq 0. \tag{2.34}$$

Išreikštiniu pavidalu tokia lygtis išsprendžiama gana retai. Natūralu, kaip ir paprastųjų diferencialinių lygčių atveju, reikia skaitinių artutinių sprendimo metodų, kurie leistų stochastines diferencialines lygtis spręsti kompiuteriais. Tačiau ką reiškia artutinai (apytikriai) išspręsti stochastinę diferencialinę lygtį, kurios sprendinys yra **atsitiktinis** procesas?

Paprastai daroma taip. Imama fiksuota laiko intervalo $[0, T]$ diskretizacija $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ su pastoviu žingsniu $h = \frac{T}{N}$. Visiems tokiems h konstruojami diskrečiojo laiko atsitiktiniai procesai X^h_{kh}, $k = 0, 1, \ldots, N$, kurie priklausytų tik nuo Vynerio proceso W reikšmių W_{kh}, $k = 0, 1, \ldots, N$, ir „kaip galima geriau" aproksimuotų tikslųjį lygties sprendinį X, kai $h = \frac{T}{N} \to 0$. Patogu laikyti, kad procesai X^h_{kh} yra apibrėžti su visais $t \in [0, T]$.

Pavyzdys. $X^h_t := X^h_{[t/h]h}$ (laiptinis procesas) arba

$$X^h_t := X^h_{kh} + \left(X^h_{(k+1)h} - X^h_{kh}\right)\frac{t - kh}{h}, \quad \text{kai} \quad t \in [kh, (k+1)h)$$

(tolydžioji laužtė). □

Kaip įvertinti apytikrių sprendinių X^h ir X artumą? Naudojami du pagrindiniai būdai.

2.87 apibrėžimas. *Sakoma, kad (X^h) yra sprendinio X n-osios eilės* ***stiprioji*** *aproksimacija, jei visiems $t \in [0, T]$,*

$$\mathbb{E}|X^h(t) - X(t)| = O(h^n), \quad h \to 0,$$

2.88 pastaba. *Užrašas $g(h) = O(h^n)$, $h \to 0$, reiškia, kad egzistuoja $h_0 > 0$ ir $C > 0$, su kuriais $|g(h)| \leq Ch^n$ kai $0 < |h| \leq h_0$ (nagrinėjamu atveju $0 < h \leq h_0$, nes $h > 0$).*

2.89 apibrėžimas. *Sakoma, kad* (X^h) *yra sprendinio* X *n-osios eilės* ***silpnoji*** *aproksimacija, jei visiems* $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}f(X^h(t)) - \mathbb{E}f(X(t)) = O(h^n), \quad h \to 0,$$

pakankamai plačiai funkcijų $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *klasei, pavyzdžiui, visų aprėžtų funkcijų, turinčių tolydžias visų eilių aprėžtas išvestines, t. y.* $C_b^\infty(\mathbb{R})$.

Turint teorinę aproksimaciją X^h, reikia mokėti generuoti kompiuteriu atsitiktinius dydžius W_{kh}. Tai nėra sunku padaryti, nes

$$W_{kh} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(W_{(i+1)h} - W_{ih} \right),$$

o prieaugiai

$$\Delta W_i = W_{(i+1)h} - W_{ih} \sim \mathcal{N}(0, h)$$

yra nepriklausomi a. d. Todėl paprastai generuojama nepriklausomų a. d. seka $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $i \in \mathbb{N}$, ir imama $\Delta W_i := \xi_i \sqrt{h}$.

Paprastųjų diferencialinių lygčių aproksimacija. Nagrinėkime paprastąją diferencialinę lygtį

$$X_t' = b(t, X(t)), \quad X_0 = x_0, \quad t \in [0, T],$$

arba

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(s, X(s))ds, \quad t \in [0, T].$$

Pažymėję $h = \frac{T}{N}$, $t_k = kh$, turime

$$X(0) = x_0, \quad X(t_{k+1}) = X(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(s, X(s))ds, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Pakeiskime integralą apytikre jo reikšme pagal stačiakampių formulę:

$$X(t_{k+1}) \approx X(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t_k, X(t_k))ds = X(t_k) + b(t_k, X(t_k)) \cdot h, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Atmetus paklaidą ir vietoje tikslios lygybės naudojant apytikslę, gauname paprasčiausią – **Oilerio** – aproksimaciją:

$$X_0^h = x_0, \quad X^h(t_{k+1}) = X^h(t_k) + b(t_k, X^h(t_k)) \cdot h, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Įrodoma, kad Oilerio aproksimacija yra pirmosios eilės:

$$\sup_{t \le T} | X^h(t) - X(t)| = O(h), \quad h \to 0.$$

Pakeitę stačiakampių formulę trapecijų formule, gautume

$$X_{t_{k+1}} \approx X(t_k) + \frac{1}{2} \left[b(t_k, X(t_k)) + b(t_{k+1}, X(t_{k+1})) \right] \cdot h, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Tačiau šią schemą nepatogu naudoti – kiekviename šios schemos žingsnyje dar reikia spręsti lygtį $X^h_{t_{k+1}}$ atžvilgiu. Šis sunkumas apeinamas, dešinėje pakeičiant narį $X^h_{t_{k+1}}$ jo apytikre reikšme, „pasiskolinta“ iš Oilerio metodo. Taip gauname **modifikuotą trapecinę** aproksimaciją:

$$\begin{aligned} X^h(t_{k+1}) &= X^h(t_k) + \frac{1}{2}\Big[b(t_k, X^h(t_k)) + b(t_{k+1}, \bar{X}^h(t_{k+1}))\Big]\cdot h, \\ \bar{X}^h(t_{k+1}) &= X^h(t_k) + b(t_k, X^h(t_k))\cdot h, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Ši aproksimacija dar vadinama **pagerintąja Oilerio**, arba **Heuno**, aproksimacija. Ji turi jau antros eilės tikslumą:

$$\sup_{t\le T} |\, X^h(t) - X(t)| \, = O(h^2), \quad h \to 0.$$

Kitas būdas aproksimacijos eilei padidinti yra Teiloro formulės pritaikymas. Taikydami ją sprendiniui X intervale $[t_k, t_{k+1}]$, gauname:

$$\begin{aligned} X(t_{k+1}) =& X(t_k) + X'(t_k)\cdot h + \frac{1}{2}X''(t_k)\cdot h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}X^{(n)}(t_k)\cdot h^n + R_{nk}, \\ R_{nk} =& \frac{1}{(n+1)!}X^{(n+1)}(\theta_{nk})\cdot h^{n+1}, \quad \theta_{nk}\in[t_k, t_{k+1}], \end{aligned}$$

nes

$$X(t) = X(t_k) + \int_{t_k}^{t} b(s, X(s))\, ds.$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} X'(t_k) &= b(t_k, X(t_k)), \\ X''(t_k) &= \partial_t\, b(t_k, X(t_k)) + \partial_x\, b(t_k, X(t_k))\cdot X'(t_k) = \\ &= \partial_t\, b(t_k, X(t_k)) + b(t_k, X(t_k))\cdot \partial_x\, b(t_k, X(t_k)), \\ X'''(t_k) &= b''_{tt} + 2b''_{tx}b + b''_{xx}b^2 + b'_t b'_x + b(b'_x)^2 \quad \text{ir t. t.}, \end{aligned}$$

nes funkcijos $y = f(t, x(t))$ išvestinė

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Atmesdami Teiloro formulėje liekamąjį narį R_n, gausime vadinamąją **n-osios eilės Teiloro** aproksimaciją. Pavyzdžiui, 2-osios eilės Teiloro aproksimacija yra

$$X^h(t_{k+1}) = X^h(t_k) + b(t_k, X^h(t_k))\cdot h + \frac{1}{2!}\Big[b'_t(t_k, X^h(t_k)) + b(t_k, X^h(t_k))\cdot b'_x(t_k, X^h(t_k))\Big]\cdot h^2.$$

Stipriosios SDL aproksimacijos. Oilerio aproksimacijos analogas stochastinei diferencialinei lygčiai yra **Oilerio-Marujamos** aproksimacija, apibrėžta lygybėmis:

$$\begin{gathered} X^h_0 = x_0, \quad X^h(t_{k+1}) = X^h(t_k) + b(t_k, X^h(t_k))\cdot h + \sigma(t_k, X^h(t_k))\cdot\Delta W_k, \\ \Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k), \quad t_k = kh. \end{gathered}$$

Patogu jos reikšmes pratęsti visam intervalui [0,T]:

$$X^h(t) = X^h(t_k) + b(t_k, X^h(t_k)) \cdot (t - t_k) + \sigma(t_k, X^h(t_k)) \cdot (W(t) - W(t_k)),$$
$$X_0^h = x_0, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

2.90 apibrėžimas. *Sakykime, lygties* (2.34) *koeficientai tenkina Lipšico sąlygą*

$$|\, b(t,x) - b(s,y)|^2 + |\, \sigma(t,x) - \sigma(s,y)|^2 \leq C\left(|\, x-y|^2 + |\, t-s|^2\right).$$

Tada

$$\sup_{t\leq T} \mathbb{E}|\, X_t^h - X_t| = O(h^{\frac{1}{2}}), \quad h \to 0,$$

t. y. Oilerio aproksimacijos eilė yra $\frac{1}{2}$.

Konvergavimo eilę nulemia „blogesnė“ – difuzinė lygties dalis.

Dabar bandysime pagerinti aproksimacijos eilę naudodami Teiloro formulės analogą – **Ito-Teiloro** formulę stochastinėms diferencialinėms lygtims. Paprastumo dėlei nagrinėsime homogeninę lygtį, t. y.

$$dX(t) = b(X(t))\, dt + \sigma(X(t))\, dW(t). \tag{2.35}$$

Iš Ito formulės $f \in C^2(\mathbb{R})$, $t \geq s$:

$$\begin{aligned} f(X(t)) &= f(X(s)) + \int_s^t \left[f'(X(u))b(X(u)) + \frac{1}{2} f''(X(u))\sigma(X(u))\right] du \\ &\quad + \int_s^t f'(X(u))\sigma(X(u))\, dW(u) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Atskiru atveju, kai $f(x) = x$, turime $Af(x) := f'(x)b(x) + \frac{1}{2}f''(x)\sigma(x) = b(x)$ ir $Sf(x) := f'(x)\sigma(x) = \sigma(x)$. Tada (2.36) virsta pradine Ito lygtimi (2.35).

Pagal analogiją su determinuota lygtimi, pritaikydami formulę (2.36) funkcijoms $f = b$ ir $f = \sigma$ pastarojoje lygtyje, gauname

$$\begin{aligned} X(t) &= X(s) + \int_s^t \left[b(X(s)) + \int_s^z Ab(X(u))\, du + \int_s^z Sb(X(u))\, dW(u)\right] dz + \\ &\quad + \int_s^t \left[\sigma(X(s)) + \int_s^z A\sigma(X(u))\, du + \int_s^z S\sigma(X(u))\, dW(u)\right] dW_z = \\ &= X(s) + b(X(s)) \int_s^t du + \sigma(X(s)) \int_s^t dW(u) + R, \end{aligned}$$

čia liekamasis narys

$$\begin{aligned} R &= \int_s^t \int_s^z Ab(X(u))\, du\, dz + \int_s^t \int_s^z Sb(X(u))\, dW(u)\, dz + \int_s^t \int_s^z A\sigma(X(u))\, du\, dz + \\ &\quad + \int_s^t \int_s^z S\sigma(X(u))\, dW(u)\, dz. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Tai – paprasčiausia Ito-Teiloro formulė. Pritaikę (2.36) formulę (2.37) formulės funkcijai $f = S\sigma$, gausime Ito-Teiloro formulę

$$X(t) = X(s)+b(X(s))\int_s^t du+\sigma(X(s))\int_s^t dW(u)+S\sigma(X(s))\int_s^t\int_s^z dW(u)\,dW(z)+R_1,$$

čia

$$\mathbb{E}R_1^2 \le C(t-s)^3.$$

Atmesdami liekamąjį narį gauname aproksimaciją

$$\begin{aligned} X^h(t_{k+1}) &= X^h(t_k) + b(X^h(t_k))\cdot h + \sigma(X^h(t_k))\cdot \Delta W_k + \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\sigma(X^h(t_k))\sigma'(X^h(t_k))\left(\Delta W_k^2 - h\right) = \\ &= X^h(t_k) + \left(b - \frac{1}{2}\,\sigma\sigma'\right)(X^h(t_k))\cdot h + \\ &\quad +\sigma(X^h(t_k))\cdot \Delta W_k + \frac{1}{2}\,\sigma\sigma'(X^h(t_k))\cdot \Delta W_k^2. \end{aligned}$$

Ji vadinama **Milšteino** aproksimacija ir jos eilė lygi 1.

Modeliavimas

1 uždavinys. Apskaičiuokite tikimybę $\mathbb{P}(\mathcal{N}(6,1) < 0)$ naudodami modeliavimą. Modeliuokite, pasinaudodami formulėmis:

$$1)\quad \mathbb{P}(\mathcal{N}(6,1) < 0) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(x_i<0)},$$

čia x_i yra stebimo a. d. $\mathcal{N}(6,1)$ reikšmės.

$$2)\quad \mathbb{P}(\mathcal{N}(6,1) < 0) e^{-12}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{6(x_i-1)}\mathbf{1}_{(x_i<0)}$$

čia x_i yra stebimo a. d. $\mathcal{N}(0,1)$ reikšmės. Imkite $n = 10^3, 10^4$.

2. uždavinys. Tarkime, kad ξ_1 ir ξ_2 yra nepriklausomi standartiniai normaliniai a. d. ir

$$X_1 = \sqrt{h}\,\xi_1 \quad \text{ir} \quad X_2 = \frac{1}{2}\,h^{3/2}\Big(\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\xi_2\Big)$$

yra pora koreliuotų Gauso a. d. Generuokite 10^3 tokių porų, imdami $h = 0.1, 1.0$ ir 10.0. Apskaičiuokite jų empirinius vidurkius, kovariacijas ir palyginkite juos su teorinėmis reikšmėmis.

3 uždavinys. Tegul a. d. ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$, yra nepriklausomi ir įgyja dvi reikšmes: $\mathbb{P}(\xi_k = 1) = \mathbb{P}(\xi_k = -1) = 1/2$. Apibrėžiame atsitiktinį klaidžiojimą

$$S_0 = 0, \ldots, S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

Tarkime,

$$X_t^n = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}, \qquad t \geq 0,$$

čia $[a] = k$, jei $k \leq a < k+1$ (sveikoji a dalis). Sumodeliuokite X_t^n, $0 \leq t \leq 10$, grafiką, kai $n = 4, 8, 16, 100$.

Nurodymai. Pastebėsime, kad $[nt] = k$, jei $k \leq nt < k+1$ (tai ekvivalentu $\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}$). Taigi,

$$X_t^n = \frac{S_k}{\sqrt{n}} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_k}{\sqrt{n}}, \quad \text{jei } \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}.$$

Proceso X_t^n, $0 \leq t \leq 10$, imitavimui, mums reikia ξ_k, $k = 1, \ldots, \xi_{10\cdot n}$. (Jei $n = 4$, tai reikia 40 a.d.).

Generuojami nepriklausomus a. d., kurių skirstiniai yra standartinai normaliniai, t. y. $\mathcal{N}(0,1)$. Juos transformuojame į diskrečius a. d., įgyjančius dvi reikšmes ± 1. Tai galima padaryti pasinaudojus funkcija

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad x > 0, \\ -1, & \text{kai} \quad x < 0. \end{cases}$$

4 uždavinys. Geometriniu Brauno judesiu vadinamas procesas

$$S(t) = S(0)\exp\Big\{\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t + \sigma W(t)\Big\}, \qquad t > 0.$$

Geometrinio Brauno judesio trajektoriją galima modeliuoti imituojant proceso $S(t)$ pokyčius

$$S(t+\Delta t) = S(t)\exp\Big\{\Big(r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\, Z\Big\}.$$

Čia Δt – laiko prieauglis, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Sumodeliuokite ir pavaizduokite geometrinį Brauno judesį, kai $S(0) = 10$, $\sigma = 0.5$, $r = 1$, $t \in [0,1]$, $\Delta t = 0.01$.

Nurodymai. Kiekviename žinsnyje Z yra skirtingi. Todėl reikia iš karto generuoti 100 nepriklausomų $\mathcal{N}(0,1)$ a. d.

4 uždavinys. Procesas laiko momentu t_0, prasidedantis iš taško x ir einantis per tašką y laiko momentu T, $T > t_0$, vadinamas Brauno tiltu ir apibrėžiamas lygybe

$$W_{t_0,x}^{T,y} = x + W(t-t_0) - \frac{t-t_0}{T-t_0}\,(W(T-t_0) - y + x).$$

Nubrėžkite Brauno tilto grafiką, kai $t_0 = 0$, $T = 1$, $x = 0$, $y = -1$.

5 uždavinys. Tarkime, kad procesas $X^n(t)$, $0 \le t \le 1$, yra apibrėžtas 1 uždavinyje ir

$$Y^n(t) = X^n(t_k^n) + \frac{t - t_k^n}{t_{k+1}^n - t_k^n}\,(X^n(t_{k+1}^n) - X^n(t_k^n)), \quad \text{kai } t_k^n \le t < t_{k+1}^n,\ k = 0,1,\dots,n-1,$$

o $Y^n(0) = 0$, $t_k^n = k/n$. Fiksuotam n apskaičiuokite santykį

$$\frac{Y^n(0,5+h) - Y^n(0,5)}{h},$$

kai h įgyja mažas reikšmes. x ašyje atidėkite h reikšmes, o y ašyje nagrinėto santykio reikšmes ir jas sujungę tiesėmis nubrėžkite grafiką. Tai padarykite imdami $n = 50$ ir $n = 100$. Pakomentuokite gautą rezultatą.

6 uždavinys. Žinome, kad stochastinį integralą $\int_0^t W(s)dW(s)$ nesunku apskaičiuoti ir jis lygus

$$\int_0^t W(s)\,dW(s) = \frac{1}{2}\,W^2(t) - \frac{1}{2}\,t.$$

Stochastinio integralo $\int_0^1 W(s)dW(s)$ aproksimacija apibrėžiama lygybe

$$\sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)),$$

čia $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = 1$ ir $\Delta_n = \max_{1\le j\le n}(t_j^n - t_{j-1}^n) \to 0$, kai $n \to \infty$.

Nubrėžkite tiesiškai interpoliuotą stochastinio integralo $\int_0^t W(s)dW(s)$ aproksimacijos trajektoriją, kai $0 \le t \le 1$, o skaidinio taškai yra vienodai nutolę vienas nuo kito atstumu $0,01$. Palyginkite gautus rezultatus su tikslia proceso reikšme, kurią gauname modeliuodami $\frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}t$.

7 uždavinys. Žinome, kad Ornšteino-Ulenbeko procesas yra lygties

$$dX(t) = -\alpha X(t)\,dt + b\,dW(t), \quad X(0) = x_0, \quad \alpha > 0$$

sprendinys. Šio sprendinio išraiška

$$X(t) = x_0 e^{-\alpha t} + b\int_0^t e^{-\alpha(t-u)}\,dW(u)\,.$$

Tarkime, $x_0 = 10$, $\alpha = 5$, $b = 3,5$. Sumodeliuokite šį procesą, stochastinį integralą keisdami jo aproksimacija. Aproksimacijos žingsnį pasirinkite laisvai.

Sprendimas Tarkime, kad intervalas $[0,1]$ taškais $t_k^n = \frac{k}{n}$ padalintas į n lygių dalių. Pažymėkime

$$\xi_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{\alpha t_j^n}\mathbf{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n)}(t).$$

Tada

$$\int_0^t \xi_n(t)dW(t) = \sum_{j=0}^{[nt]-1} e^{\alpha t_j^n}\big(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\big),$$

čia $[nt]$ – sveikoji nt dalis. Apibrėžkime

$$\begin{aligned} Y(t_k^n) =& x_0 e^{-\alpha t_k^n} + b e^{-\alpha t_k^n}\int_0^t \xi_n(t)dW(t) \\ =& x_0 e^{-\alpha t_k^n} + b e^{-\alpha t_k^n}\sum_{j=0}^{k-1} e^{\alpha t_j^n}\big(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\big). \end{aligned}$$

Pasinaudoję stochastinio integralo savybėmis ir nelygybe

$$|e^x - 1| \le |x|e^{|x|}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

gausime, kad

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E} \max_{1\le k\le n} \big|X(t_k^n) - Y(t_k^n)\big| \\
&\quad = \mathbb{E} \max_{1\le k\le n} \left| b\int_0^{t_k^n} e^{-\alpha(t_k^n - u)}\, dW(u) - b e^{-\alpha t_k^n} \sum_{j=0}^{k-1} e^{\alpha t_j^n} \big(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\big) \right| \\
&\quad \le b\,\mathbb{E} \max_{1\le k\le n} \left| \int_0^{t_k^n} e^{\alpha u}\, dW(u) - \sum_{j=0}^{k-1} e^{\alpha t_j^n} \big(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)\big) \right| \\
&\quad = b\,\mathbb{E} \max_{1\le k\le n} \left| \int_0^{t_k^n} \Big(e^{\alpha u} - \xi_n(u)\Big) dW(u) \right| \\
&\quad \le b\,\mathbb{E}^{1/2} \left| \int_0^{t_n^n} \Big(e^{\alpha u} - \xi_n(u)\Big) dW(u) \right|^2 = b\sqrt{\int_0^1 \Big(e^{\alpha u} - \xi_n(u)\Big)^2 du} \\
&\quad \le b \sup_{0\le t\le 1} \big|e^{\alpha t} - \xi_n(t)\big| = b \max_{1\le k\le n} \sup_{t_{k-1}^n \le t < t_k^n} \big|e^{\alpha t} - e^{\alpha t_{k-1}^n}\big| \\
&\quad = b \max_{1\le k\le n} \sup_{t_{k-1}^n \le t < t_k^n} e^{\alpha t_{k-1}^n} \big|e^{\alpha(t - t_{k-1}^n)} - 1\big| \\
&\quad \le b\alpha e^{\alpha} \max_{1\le k\le n} \sup_{t_{k-1}^n \le t < t_k^n} |t - t_{k-1}^n| e^{\alpha(t - t_{k-1}^n)} \\
&\quad \le b\alpha e^{\alpha} \max_{1\le k\le n} (t_k^n - t_{k-1}^n) e^{\alpha(t_k^n - t_{k-1}^n)} = b\alpha e^{\alpha} n^{-1} e^{\alpha/n}.
\end{aligned}
$$

Literatūra

1. Breiman L., Probability, Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
2. Brzeźniak Z. and Zastawniak T., Basic Stochastic Processes, Springer, 1999.
3. Dembo A., Probability Theory. Lecture notes, Stanford University, 2011.
4. Iacus S. M., Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations, Springer, 2008.
5. Mackevičius V., Stochastinė analizė. Vilniaus universiteto leidykla, 2005.
6. Shiryaev A. N., Probability, Springer, 1996.