1.6. Diskretusis variacinio reguliarizavimo algoritmas

5 paskaitoje suformulavome variacinį reguliarizavimo algoritmą, kuriuo sprendėme integralinę lygtį

$$Av := \int_a^b K(x,s)v(s)\,ds = u(x), \quad c \le x \le d,$$

kai metrinė V erdvė sutampa su tolydžiųjų funkcijų erdve $C[a,b]$, o pradiniai duomenys $u(x)$ priklauso erdvei $L_2[c,d]$. Naudodami variacinį reguliarizavimo metodą, ieškome funkcijos $v_\alpha \in V_1$, kuri minimizuoja funkcionalą:

$$T_\alpha(v_\alpha, u_\delta) = \inf_{v \in V_1} T_\alpha(v, u_\delta), \tag{1.16}$$

čia funkcionalas $T_\alpha(v, u_\delta)$ apibrėžtas taip

$$T_\alpha(v, u_\delta) = \rho_u^2(Av, u_\delta) + \alpha\Omega(v).$$

Parametrą α parenkame taip, kad galiotų lygybė

$$\rho_u(Av, u_\delta) = \delta.$$

Stabilizuojančiu funkcionalu $\Omega(v)$ imsime funkcionalą

$$\Omega(v) := \int_a^b \Big(q(s)v^2(s) + p(s)\Big(\frac{dv}{ds}\Big)^2\Big)\,ds,$$

funkcijos $q(s), p(s) \in C[a,b]$ tenkina sąlygas

$$q(s) > 0, \quad p(s) \ge p_0 > 0.$$

Parodėme, kad funkcionalo $T_\alpha(v)$ ekstremumo funkciją randame spręsdami integralinį-diferencialinį kraštinį uždavinį (kraštinį uždavinį Eulerio lygčiai):

$$\int_a^b \tilde{K}(s,t)v(t)dt + \alpha\Big(-\frac{d}{ds}\Big(p(s)\frac{dv}{ds}\Big) + q(s)v(s)\Big) = \int_c^d K(x,s)u_\delta(x)dx, \tag{1.17}$$

$$v(a) = v_a, \quad v(b) = v_b,$$

integralo branduolys yra apibrėžtas taip:

$$\tilde{K}(s,t) = \int_c^d K(x,s)K(x,t)\,dx.$$

Surasti sprendinį v_α analiziniu būdu pavyksta tik pačiais paprasčiausiais atvejais, todėl dažniausiai naudojame skaitinius metodus. Tada galimi keli skirtingi uždavinio sprendimo būdai.

1 būdas. Diskretizuojame integralinę-diferencialinę Eulerio lygtį (1.17).

2 būdas. Diskretizuojame funkcionalą (1.16) ir ieškome diskrečiojo funkcionalo minimumo.

Apžvelgsime abu būdus, nes jie ne visada apibrėžia tą patį sprendinio artinį.

1.6.1. Eulerio lygties skaitinis sprendimas

Apibrėžiame diskrečiuosius tinklus

$$\omega_{1h} = \{s_i : \ \ s_i = a + ih, \ \ i = 0, \dots, N, \ \ s_N = b\},$$
$$\omega_{2h} = \{x_i : \ \ x_i = c + ih, \ \ i = 0, \dots, M, \ \ x_M = d\},$$

kuriose apibrėžtos diskrečiosios funkcijos, aproksimuojančios tolydžias funkcijas:

$$V_i \approx v(s_i), \quad U_i \approx u(x_i).$$

Integralą aproksimuojame naudodami trapecijų formulę, tada gauname diskretųjį jo artinį

$$\int_a^b \tilde{K}(s,t)v(t)dt \approx \frac{h}{2}\tilde{K}(s,t_0)V_0 + h\sum_{i=1}^{N-1}\tilde{K}(s,t_i)V_i + \frac{h}{2}\tilde{K}(s,t_N)V_N.$$

Skleisdami pointegralinę funkciją Teiloro eilute, patikriname, kad pakankamai tolydžioms funkcijoms aproksimavimo paklaida yra $\mathcal{O}(h^2)$ eilės dydis.

Apibrėžkime diskrečiuosius išvestinių operatorius

$$V_{s,i} = \frac{V_{i+1} - V_i}{h}, \quad V_{\bar{s},i} = \frac{V_i - V_{i-1}}{h}.$$

Tada diferencialinę lygtį aproksimuojame baigtinių skirtumų lygtimi

$$-\frac{d}{ds}\Big(p(s)\frac{dv}{ds}\Big) + q(s)v(s) \approx -(p_{i-\frac{1}{2}}V_{\bar{s}})_s + q_iV_i.$$

Pakankamai tolydžioms funkcijoms aproksimavimo paklaida yra $\mathcal{O}(h^2)$ eilės dydis.

Gauname tokią tiesinių lygčių sistemą:

$$\frac{h}{2}\tilde{K}(s_j,t_0)V_0 + h\sum_{i=1}^{N-1}\tilde{K}(s_j,t_i)V_i + \frac{h}{2}\tilde{K}(s_j,t_N)V_N$$
$$+ \alpha\big(q_jV_j - (p_{j-\frac{1}{2}}V_{\bar{s}})_s\big) = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$
$$V_0 = v_a, \quad V_N = v_b,$$

čia pažymėjome

$$f_j = \frac{h}{2}K(x_0, s_j)u_{\delta,0} + h\sum_{i=1}^{M-1} K(x_i, s_j)u_{\delta,i} + \frac{h}{2}K(x_M, s_j)u_{\delta,M}.$$

Šią tiesinių lygčių sistemą užrašykime matricine forma

$$\mathbf{AV} = \mathbf{F},$$

čia pažymėjome vektorius $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \ldots, V_{N-1})^T$, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_{N-1})^T$, o $\mathbf{A}$ yra simetrinė ir teigiamai apibrėžta matrica.

Įvertinsime tokio algoritmo sudėtingumą. Visus vektoriaus $\mathbf{F}$ koeficientus apskaičiuojame atlikę $\mathcal{O}(NM)$ aritmetinių veiksmų, matricos $\mathbf{A}$ koeficientus randame atlikę $\mathcal{O}(MN^2)$ veiksmų. Jeigu gautąją tiesinių lygčių sistemą spręsime Gauso metodu, tai atliksime dar $\mathcal{O}(N^3)$ aritmetinių veiksmų. Tokias tiesinių lygčių sistemas reikės spręsti tiek kartų, kiek iteracijų atliksime ieškodami optimalaus variacinio parametro α, t.y. spręsdami netiesinę lygtį

$$\frac{h}{2}R_0^2 + h\sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 + \frac{h}{2}R_M^2 = \delta^2.$$

čia pažymėjome sprendinio netiktį

$$R_j = \frac{h}{2}K(x_j, s_0)V_0 + h\sum_{i=1}^{N-1} K(x_j, s_i)V_i + \frac{h}{2}K(x_j, s_N)V_N - u_{\delta,j}.$$

1.6.2. Funkcionalo diskretizavimo metodas

Reikia minimizuoti funkcionalą

$$T_\alpha(v, u_\delta) = \rho_u^2(Av, u_\delta) + \alpha\Omega(v).$$

Integralus aproksimuojame diskrečiosiomis sumomis. Pateiksime abiejų tarpinių funkcionalų aproksimavimo formules:

$$\Omega(v) \sim \Omega_h(\mathbf{V}) := \frac{h}{2}q_0V_0^2 + h\sum_{j=1}^{N-1} q_jV_j^2 + \frac{h}{2}q_NV_N^2 + \sum_{j=0}^{N-1} p_{j+\frac{1}{2}}\Big(\frac{V_{j+1} - V_j}{h}\Big)^2 h,$$

$$\rho_u^2(Av, u_\delta) \sim \rho_{h,u}^2(A_h\mathbf{V}, u_\delta) := \frac{h}{2}R_0^2(\mathbf{V}) + h\sum_{j=1}^{M-1} R_j^2(\mathbf{V}) + \frac{h}{2}R_M^2(\mathbf{V}),$$

$$R_j(\mathbf{V}) = \frac{h}{2}K(x_j, s_0)V_0 + h\sum_{n=1}^{N-1} K(x_j, s_n)V_n + \frac{h}{2}K(x_j, s_N)V_N - u_{\delta,j}.$$

Tada sprendžiame variacinį uždavinį

$$T_{h,\alpha}(\tilde{\mathbf{V}}_\alpha) = \min_{\mathbf{V}\in V_{1,h}} T_{h,\alpha}(\mathbf{V}, u_\delta),$$

čia pažymėjome

$$T_{h,\alpha}(\mathbf{V}) := \rho^2_{h,u}(A_h\mathbf{V}, u_\delta) + \alpha\Omega_h(\mathbf{V}),$$
$$V_{1,h} = \{\mathbf{V} : \quad V_0 = v_a, \quad V_N = v_b\}.$$

Funkcionalo minimumo būtinoji sąlyga yra

$$\frac{\partial T_{h,\alpha}(\mathbf{V})}{\partial V_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Apskaičiuosime atskirų funkcionalo dalių dalines išvestines.

$$\frac{\partial \Omega_h(\mathbf{V})}{\partial V_j} = 2\Big[q_j V_j h - p_{j+\frac{1}{2}}\Big(\frac{V_{j+1} - V_j}{h}\Big) + p_{j-\frac{1}{2}}\Big(\frac{V_j - V_{j-1}}{h}\Big)\Big].$$

Taigi gavome tokią pačią stabilizuojančio funkcionalo aproksimaciją, kaip ir pirmajame algoritme.

Nagrinėkime antrąjį funkcionalą:

$$\frac{\partial \rho^2_{h,u}(A_h\mathbf{V}, u_\delta)}{\partial V_j} = 2h^2\Big(\frac{1}{2}R_0(\mathbf{V})K(x_0, s_j) + \sum_{n=1}^{M-1} R_n(\mathbf{V})K(x_n, s_j)$$
$$+ \frac{1}{2}R_M(\mathbf{V})K(x_M, s_j)\Big).$$

Vėl gauname tiesinių lygčių sistemą.

Parametro α radimo algoritmus aptarsime vėliau, kai išnagrinėsime sprendinio V_α monotoniškumo savybes parametro α atžvilgiu. Priminsime, kad šį parametrą randame spręsdami uždavinį

$$\rho^2_{h,u}(A_h\mathbf{V}_\alpha, u_\delta) = \delta.$$

1.6 pavyzdys. Trečiosios eilės išvestinės skaičiavimo uždavinys. Funkcijos $u(t)$ trečiąją išvestinę $v(t) = u'''(t)$ galime rasti spręsdami integralinę lygtį

$$\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} v(s)\, ds = u(t).$$

Tarkime, kad vietoj tikslios funkcijos $u(t)$ turime tik matavimo duomenis

$$u_\delta(t_i) = u(t_i)(1 + \Theta_i \delta), \quad i = 0, 1, \dots, K,$$

čia Θ_i yra atsitikniai skaičiai, tolygiai pasiskirstę intervale $[-1, 1]$,

$$t_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, K, \ \ t_K = T.$$

Naudodami variacinį reguliarizavimo metodą, rasime funkciją $v(t)$.

1.6.3. Reguliarizuojančio parametro radimas

Optimalią parametro α reikšmę randame spręsdami lygtį

$$\rho_u(Av_\alpha, u_\delta) = \delta.$$

Taigi gauname netiesinę vieno kintamojo lygtį. Jos sprendimui galime naudoti įvairius skaitinius algoritmus, pvz. intervalo dalijimo pusiau, Niutono arba gradientinio nusileidimo metodus.

Lygties sprendinio egzistavimas, jo vienatis priklauso nuo uždavinyje suformuluotų funkcionalų. Dabar ištirsime funkcionalų

$$T_\alpha(v_\alpha, u_\delta), \quad \rho_u^2(Av_\alpha, u_\delta), \quad \Omega(v_\alpha)$$

reikšmių priklausomumą nuo parametro α. Šiame skirsnyje apsiribosime tik funkcijų

$$m(\alpha) := T_\alpha(v_\alpha, u_d elta), \ \ r(\alpha) := \rho_u^2(Av_\alpha, u_\delta), \ \ \omega(\alpha) := \Omega(v_\alpha)$$

monotoniškumo analize.

1.3 lema. *Funkcijos $m(\alpha)$, $r(\alpha)$, $\omega(\alpha)$ yra monotoniškos argumento α funkcijos, t. y. jei $\alpha_1 < \alpha_2$, tai teisingi tokie įverčiai*

$$m(\alpha_1) \le m(\alpha_2), \quad r(\alpha_1) \le r(\alpha_2), \quad \omega(\alpha_1) \ge \omega(\alpha_2).$$

Įrodymas. Pirmiausia pastebėsime, kad jei uždavinys

$$T_\alpha(v_\alpha, u_\delta) = \inf_{v \in V_1} T_\alpha(v, u_\delta)$$

turi daugiau nei vieną sprendinį, tai funkcijos $r(\alpha)$, $\omega(\alpha)$ gali būti ir nevienareikšmės (aišku, kad $m(\alpha)$ yra vienareikšmė pagal apibrėžimą).

Kadangi $\alpha_1 < \alpha_2$, o $\omega(\alpha) \geq 0$, tai teisingos nelygybės

$$m(\alpha_2) = r(\alpha_2) + \alpha_2\omega(\alpha_2) \geq r(\alpha_2) + \alpha_1\omega(\alpha_2) \geq r(\alpha_1) + \alpha_1\omega(\alpha_1) = m(\alpha_1),$$

taigi įrodėme, kad $m(\alpha)$ yra monotoniškai didėjanti funkcija.

Nagrinėkime tokias nelygybes

$$r(\alpha_1) + \alpha_1\omega(\alpha_1) \leq r(\alpha_2) + \alpha_1\omega(\alpha_2),$$
$$r(\alpha_2) + \alpha_2\omega(\alpha_2) \leq r(\alpha_1) + \alpha_2\omega(\alpha_1).$$

Jas sudėkime

$$(\alpha_2 - \alpha_1)\omega(\alpha_1) \geq (\alpha_2 - \alpha_1)\omega(\alpha_2).$$

Kadangi $\alpha_2 > \alpha_1$, tai teisinga nelygybė $\omega(\alpha_1) \geq \omega(\alpha_2)$, taigi $\omega(\alpha)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija (tokios savybės ir galėjome tikėtis, nes didėjant α reikšmei, santykinai didėja funkcionalo $\Omega(v)$ reikšmingumas). Iš pateiktojo įrodymo seka, kad ši nelygybė teisinga ir tada, kai $\omega(\alpha)$ yra nevienareikšmė funkcija.

Dabar nagrinėkime nelygybę

$$r(\alpha_2) + \alpha_1\omega(\alpha_2) \geq r(\alpha_1) + \alpha_1\omega(\alpha_1),$$

ją pertvarkę ir atsižvelgę į tai, kad $\omega(\alpha)$ yra monotoniškai mažėjanti funkcija, įrodome įvertį

$$r(\alpha_2) \geq r(\alpha_1) + \alpha_1\big(\omega(\alpha_1) - \omega(\alpha_2)\big) \geq r(\alpha_1).$$

Taigi $r(\alpha)$ yra monotoniškai didėjanti funkcija. $\Box$

Šioje lemoje įrodėme, kad funkcijos $m(\alpha)$, $r(\alpha)$ ir $\omega(\alpha)$ yra monotoniškos, tačiau jos nebūtinai yra griežtai monotoniškos. Todėl lygtis

$$\rho_u(Av_\alpha, u_\delta) = \delta$$

gali turėti daug sprendinių. Be įrodymo suformuluosime teorema apie sąlygas, garantuojančias griežtą funkcijų monotoniškumą.

1.6 teorema. *Jei bet kokioms funkcijoms $u\delta \in U$ ir visiems $\alpha > 0$ variacinio uždavinio sprendinys v_α yra vienintelis, operatorius A yra tiesinis, U yra Hilberto erdvė, o funkcionalo $\Omega(v)$ Frešė išvestinė nelygi nuliui, tada funkcijos $m(\alpha)$, $r(\alpha)$ ir $\omega(\alpha)$ yra griežtai monotoniškos:*

$$m(\alpha_1) < m(\alpha_2), \quad r(\alpha_1) < r(\alpha_2), \quad \omega(\alpha_1) > \omega(\alpha_2), \quad \alpha_1 < \alpha_2.$$