6. paskaita. Aukštesniųjų eilių tiesinės nehomogeninės diferencialinės lygtys su pastoviaisiais koeficientais.

6.1. Atskirojo sprendinio radimas, naudojant dešiniosios pusės pavidalą.
6.2. Bendrojo sprendinio radimas, taikant konstantų varijavimo metodą.
6.3. Atskirojo sprendinio radimas, taikant superpozicijos taisyklę

6.1. Atskirojo sprendinio radimas, naudojant dešiniosios pusės pavidalą.

Turėjome, kad į homogeninės lygties

$$L[u] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0\,, \quad y = y(x) \tag{6.1}$$

fundamentinę sprendinių sistemą įeina funkcijos $e^{k_j x}, xe^{k_j x}, \ldots, x^{l_j - 1}e^{k_j x}$, atitinkančios charakteringojo daugianario $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \cdots + p_1 k + p_0 = 0$ l_j-tojo kartotinumo šaknį k_j bei funkcijos

$$e^{\alpha_{\tilde{j}} x}\cos\beta_{\tilde{j}} x, \ldots, x^{m_{\tilde{j}}} e^{\alpha_{\tilde{j}} x}\cos\beta_{\tilde{j}} x$$

ir $e^{\alpha_{\tilde{j}} x}\sin\beta_{\tilde{j}} x, \ldots, x^{m_{\tilde{j}}} e^{\alpha_{\tilde{j}} x}\sin\beta_{\tilde{j}} x$,

atitinkančios $m_{\tilde{j}}$ - kartotinumo charakteringojo polinomo kompleksinių šaknų porą $\alpha_{\tilde{j}} \pm i\beta_{\tilde{j}}$.

Bendrąjį homogeninės lygties sprendinį galime užrašyti pavidalu

$$y(x) = \sum p_j(x) e^{k_j x}, \tag{6.2}$$

kur $p_j(x)$ - polinomai, kurių laipsnis ne aukštesnis kaip l_j. Dabar tirsime tiesinę nehomogeninę n-os eilės lygtį. Norint rasti jos bendrąjį nehomogeninės lygties sprendinį, kaip anksčiau buvo minėta (Teorema 4.5), pakanka rasti kurį nors atskirąjį jos sprendinį ir sudėti su (6.2).

Išnagrinėsime kai kuriuos nehomogeninės lygties dešiniųjų pusių atvejus. Parodysime, kaip galima konstruoti atskiruosius nehomogeninės lygties sprendinius, panaudojant dešiniosios pusės analizinę išraišką.

6.1.1. Tegul $f(x) = ae^{k_0 x}$

Jeigu k_0 nėra charakteringos lygties $R_n(k) = 0$ šaknis, tai lygties

$$L_n[y] = f(x) \tag{6.3}$$

atskirąjį sprendinį galima surasti

$$y(x) = Ae^{k_0 x}$$

pavidalu. Įstatę į (6.3) lygtį gauname

$$AR_n(k_0)e^{k_0 x} = ae^{k_0 x} \Rightarrow A = \frac{a}{R_n(k_0)}$$

6.1. pavyzdys.

$$y'' + y = e^x\,; \quad R_2(k) \equiv k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i$$

$$R(1) = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Homogeninės lygties sprendinys yra $c_1\cos x + c_2\sin x$

$$A = \frac{a}{R_n(k_0)} = \frac{1}{2} - 1,$$

todėl bendrasis nehomogeninės lygties sprendinys yra

$$y(x)=\frac{1}{2}e^x+c_1\cos x+c_2\sin x \qquad \left(\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^x=e^x\right)$$

tuo atveju, kai k_0 yra $R_n(k)=0$ šaknis, šis pavidalas netinka.

6.1.2. Išnagrinėsime atvejį, kai

Lema 6.1. Jei k_0 - realioji ar menamoji charakteringos lygties m kartotinumo šaknis, tai atskirąjį (6.3) lygties sprendinį galima rasti pavidalu

$y=Ax^m e^{k_0x}$, kur A – tam tikra konstanta

6.2. pavyzdys. $y''-2y'+y=e^x$

$k^2-2k+1\equiv(k-1)^2=0 \quad k=1, m=2$

Homogeninės lygties sprendinys yra lygus $(c_1+c_2x)e^x$

$$y=Ax^2e^x$$

$$y'=(2Ax+Ax^2)e^x$$

$$y''=(2A+2Ax+2Ax+Ax^2)e^x=(Ax^2+4Ax+2A)e^x$$

$$\left(\begin{array}{l} Ax^2+4Ax+2A-2Ax^2-4Ax+Ax^2=1 \\ 2A=1 \quad A=\frac{1}{2}\end{array}\right),$$

todėl bendrasis duotosios lygties sprendinys yra

$$y(x)=\frac{1}{2}x^2e^x+(c_1+c_2x)e^x$$

6.1.3. Tegul turime 2 diferencialines lygtis

$$y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1y'+p_0=ax^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \tag{6.4}$$

$$y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1y'+p_0=ax^{l-1}e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{6.5}$$

kur α,β,p_j - realūs skaičiai, l - natūralus

Padauginę (6.5) lygtį iš menamojo vieneto i ir pridėję prie (6.4), gausime

$$z^{(n)}+p_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+p_0z=ax^{l-1}e^{k_0x}, \tag{6.6}$$

kur $z=y_1+iy_2$, o $k_0=\alpha+i\beta$

(6.6) lygties sprendinio realioji dalis yra (6.4) lygties sprendinys, o menamoji dalis – (6.5) lygties sprendinys.

6.3. pavyzdys. Tegul $y''+y=\sin x$

Kartu su ja išnagrinėsime ir $y''+y=\cos x$

$$y_1''+y_1=\sin x \qquad y_2''+y_2=\cos x$$

$$z=y_1+iy_2$$

Tada $z''+z=e^{ix}$

$k=1$ - diferencialinės lygties 1-ojo kartotinumo šaknis.

Tada atskiras nehomogeninės lygties sprendinys

$$z=Axe^{ix},$$

$$z'=(A+iAx)e^{ix},\ z''=(iA+i(A+iAx))e^{ix}=(2iA-Ax)e^{ix}$$

$$(2iA-Ax)+Ax+Ax=2iA=1 \qquad A=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$$

Taigi,

$$z=-\frac{i}{2}xe^{ix}=-\frac{ix}{2}e^{ix}=-\frac{ix}{2}(\cos x+i\sin x)=-\frac{i}{2}x\cos x+\frac{x}{2}\sin x=\frac{x}{2}\sin x-i\frac{x}{2}\cos x$$

Jo menamoji dalis $-\frac{x}{2}\cos x$ yra duotosios lygties sprendinys.

Jeigu $l>1$, tai atskirojo sprendinio galima ieškoti pavidalu

$\left(A_m x^m+\cdots+A_{m+l-1}x^{m+l-1}\right)e^{k_0x}$

kur m – šaknies k_0 kartotinumas, $R_n(k_0)=0$, o $A_m,\ldots,A_{m+l-1}$ - konstantos.

6.4. pavyzdys. $y''-y=xe^x \qquad (k_0=\pm1, m=1, l=2)$

Taigi, $y=(A_1x+A_2x^2)e^x$

$$y'=(A_1+2A_2x+A_1x+A_2x^2)e^x=(A_1+(A_1+2A_2)x+A_2x^2)e^x$$

$$y''=(A_1+2A_2+2A_2x+A_1+(A_1+2A_2)x+A_2x^2)e^x$$

$$2A_1+2A_2+(A_1+4A_2)x+A_2x^2-A_1x-A_2x$$

$$2A_1+2A_2=0$$

$$4A_2=1$$

$$A_2=\frac{1}{4}\ ,\ A_1=-\frac{1}{4}$$

$$y(x)=(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^2)e^x$$

Bendrasis nehomogeninės lygties sprendinys yra

$$y(x)=\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^2\right)e^x+c_1e^x+c_2e^{-x}$$

Todėl iš čia ir iš to, kas anksčiau pasakyta išplaukia, kad jeigu

$$f(x)=P_{m-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x+Q_{m-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

kur P_{m-1} ir Q_{m-1} - algebriniai polinomai ne aukštesnio kaip m-1 laipsnio, tai atskirojo sprendinio forma sutampa su dešiniąja puse, jeigu $\alpha\pm i\beta$ nėra charakteringosios lygties $R_n(k)=0$ sprendiniu.

Jeigu $\alpha\pm i\beta$ yra charakteringosios lygties 1-ojo kartotinumo sprendiniai, tai atskirojo sprendinio reikia ieškoti pavidalu:

$$y(x)=P_{l+m-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x+Q_{l+m-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

Jeigu dešinėje pusėje yra tik, pavyzdžiui, narys $Q_{m-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta$, tai atskirojo sprendinio vis tiek reikia ieškoti pavidalu

$$R_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+R_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\,,$$

kur $R_1(x)$ ir $R_2(x)$ - atitinkamų eilių polinomai.

6.5. pavyzdys.

$$y''+y=x\sin x \qquad k^2+1 \quad k_{1,2}=\pm i=0\pm1\cdot i$$

$$\alpha=0,\ \beta=1$$

Charakteringosios lygties šaknys yra 1-ojo kartotinumo, todėl ieškosime duotos lygties sprendinio pavidalu

$$y(x)=\left(Ax+Bx^2\right)\sin x+\left(Cx+Dx^2\right)\cos x$$

(pabaigti savarankiškai)

6.6. pavyzdys. $y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=x^2e^x$

$$k^4-4k^3+6k^2-4k+1=\left(k-1\right)^4=0\,,$$

reiškia, $\alpha = 1$ - 4-to kartotinumo charakteringosios lygties šaknis, todėl atskirojo sprendinio reikia ieškoti pavidalu

$$y(x) = \left(Ax^4 + Bx^5 + Cx^6\right)e^x$$

(pabaigti savarankiškai)

6.2. Bendrojo sprendinio radimas, taikant konstantų varijavimo metodą.

Paaiškinsime šį metodą trečios eilės lygties pavyzdžiu

$$L_3[y] = y''' + p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = f(x)$$

Tegul y_1, y_2, y_3 - tiesiškai nepriklausomi homogeninės lygties sprendiniai

$$L_3[y_j] = 0$$

Ieškosime nehomogeninės lygties sprendinio pavidalu

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x),$$

kur $c_j(x)$ - tam tikros (kol kas nežinomos) diferencijuojamos funkcijos. Pareikalausime, kad

$$\sum_{i=1}^{3} c_i'(x)y_i(x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_i'(x)y_i'(x) = 0$$

Tada tikrinsime

$$y' = \sum_{i=1}^{3} c_i y_i' + \sum_{i=1}^{3} c_i' y_i = \sum_{i=1}^{3} c_i y_i'$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{3} c_i y_i'' + \sum_{i=1}^{3} c_i' y_i' = \sum_{i=1}^{3} c_i y_i''$$

$$y''' = \sum_{i=1}^{3} c_i y_i''' + \sum_{i=1}^{3} c_i' y_i''$$

Įstatę į lygtį, gauname

$$\sum_{i=1}^{3} c_i y_i''' + \sum_{i=1}^{3} c_i' y_i'' + p_2 \sum_{i=1}^{3} c_i y_i'' + p_1 \sum_{i=1}^{3} c_i y_i' + p_0 \sum_{i=1}^{3} c_i y_i = f(x)$$

arba $\sum_{i=1}^{3} c_i\left(y_i''' + p_2 y_i'' + p_1 y_i' + p_0 y_i\right) + \sum_{i=1}^{3} c_i' y_i'' = f(x)$

y_i - homogeninės lygties sprendinys

Todėl turime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} c_i'(x)y_i(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} c_i'(x)y_i'(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} c_i'(x)y_i''(x) = f(x) \end{cases}$$

Jos determinantas

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_3(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_3'(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_3''(x) \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$$

Todėl ši sistema turi vienintelį sprendinį $c_i'(x) = \varphi_i(x)$ arba $c_i(x) = \int \varphi_i(x)dx$

6.5. pavyzdys.

$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

$k^2 - 3k + 2 = 0 \quad k_1 = 1, k_2 = 2$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = 0$

$c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} = e^{3x}$ $\qquad W[y_1, y_2] = e^{3x}$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^{3x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{e^{3x}} = -e^{2x}\ ,\ c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^{3x} \end{vmatrix}}{e^{3x}} = e^x$$

$c_1'(x) = -e^{2x}$

$c_1(x) = -\int e^{2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^{2x}d2x = -\frac{1}{2}e^{2x}$

$c_2(x) = \int e^x dx = e^x$

$y = -\frac{1}{2}e^{2x}\cdot e^x + e^x \cdot e^{2x} = \frac{1}{2}e^{3x}$

Tada $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}$

6.3. Atskirojo sprendinio radimas, taikant superpozicijos taisyklę

Išnagrinėsime tą atvejį, kai lygties dešinioji pusė yra funkcijų suma. Tokiu atveju galima pasinaudoti diferencialinio operatoriaus tiesiškumo savybe ir gauti bendrąjį sprendinį taikant taip vadinamą **superpozicijos principą**, kuris formuluojamas taip:

jeigu $L_n[y_i] = f_i(x)$, $i = 1, \dots, q,$ (6.7)

tai $y(x) = \sum_{i=1}^{q} y_i$ yra lygties

$$L_n[y] = L_n\left[\sum_{i=1}^{q} y_i\right] = \sum_{i=1}^{q} L[y_i] = \sum_{i=1}^{q} f_i(x) \quad (6.8)$$

sprendinys.

Atvirkščiai, (6.7) lygties bendrąjį sprendinį galima gauti (6.7) lygčių bendrųjų sprendinių tiesinio darinio pavidalu. Tokiu būdu, lygties su sudėtinga dešiniąja puse sprendimą galima suvesti į eilės paprastesnių uždavinių sprendimą.