5. paskaita. Tiesinės homogeninės n-tos eilės lygtys su pastoviais koeficientais.

5.1 Charakteringoji lygtis

Tegul turime n-osios eilės tiesinę homogeninę diferencialinę lygtį

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0 \qquad (5.1)$$

$$-\infty < x < \infty$$

kurioje koeficientai p_j – pastovūs (konstantos). Anksčiau matėme, kad jeigu yra žinoma fundamentinė sprendinių sistema $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, tai bet kuris sprendinys gali būti išreikštas pavidalu

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)$$

Ieškosime (5.1) lygties sprendinio $y = e^{kx}$ pavidalu, kur k – pastovus skaičius. Įstatę į lygtį gausime

$$L[e^{kx}] = e^{kx}[k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \cdots + p_1 k + p_0] = 0$$

Kadangi $e^{kx} \neq 0$, tai turi būti

$$R_n(k) = k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \cdots + p_1 k + p_0 = 0 \qquad (5.2)$$

Vadinasi, e^{kx} gali tenkinti (5.1) lygtį tada ir tik tada, kai k – polinomo $R_n(k)$ šaknis.

Algebrinė lygtis $R_n(k) = 0$ yra vadinama (5.1) diferencialinės lygties **charakteringąja lygtimi**. Ji turi lygiai n šaknų (įskaitant jų kartotinumus).

5.2 Skirtingų charakteringosios lygties šaknų atvejis

Išnagrinėsime visus charakteringosios lygties sprendinių atvejus ir nustatysime (5.1) lygties bendrojo sprendinio pavidalą.

Tegul $k_1, k_2, \ldots, k_n$ - skirtingi. Tada $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$ yra (5.1) lygties sprendiniai, be to tiesiškai nepriklausomi. Vadinasi, jie sudaro fundamentinę sprendinių sistemą ir, tokiu atveju, bendrąjį (bet kurį) lygties (5.1) sprendinį galima išreikšti taip:

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + \cdots + c_n e^{k_n x}$$

5.1 pavyzdys. $y'' - 5y' + 6y = 0$

$$k^2 - 5k + 6 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = 3 \text{ ir } 2$$

Taigi, $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

5.2 pavyzdys. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0$, $k^2(k-2) - (k-2) = 0$

$$(k^2 - 1)(k - 2) = 0$$

Charakteringosios lygties šaknys $k_{1,2,3} = 1, -1, 2$

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$$

5.3 Kompleksinių šaknų atvejis

Jeigu lygties (5.1) koeficientai realūs, o kuri nors charakteringosios lygties šaknis – kompleksinis skaičius

$$k_j = \alpha_j + i\beta_j,$$

tai $\bar{k}_j = \alpha_j - i\beta_j$ irgi yra lygties (5.2) šaknis.

Tada $ae^{k_jx} \pm be^{\bar{k}_jx}$ irgi tenkins (5.1) lygtį. Todėl ir

$$\frac{1}{2}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}\right] = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\frac{1}{2i}\left[e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right] = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

bus (5.1) DL sprendiniai. Čia panaudojame Oilerio (Euler) formules $e^{\pm ix} = \cos x \pm i\sin x$.

Funkcijų sistema $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$ yra patogesnė už sistemą $\{e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)x}\}$ tuo, kad ją sudaro realios funkcijos. Ji irgi yra tiesiškai nepriklausoma visoje skaičių tiesėje $(-\infty,\infty)$, todėl kai (5.1) lygties koeficientai realūs, visada yra naudojama būtent ši sistema.

5.3 pavyzdys. $y'' + y = 0$

$$k^2 + 1 = 0$$

$$k = \pm i$$

$$y = c_1e^{ix} + c_2e^{-ix}$$

$$y = c_1(\cos x + i\sin x) + c_2(\cos x - i\sin x) = (c_1 + c_2)\cos x + i(c_1 - c_2)\sin x = A\cos x + B\sin x$$

5.4 pavyzdys. 4. $y'' + y' + y = 0$

$$k^2 + k + 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

5.4 Kartotinių šaknų atvejis

Jeigu k_1 - charakteringosios lygties m kartotinumo šaknis, tai fundamentinių sprendinių sistemoje atsiranda m lygių funkcijų $e^{k_1x}\cdots e^{k_mx}, k_1 = k_2 = \ldots = k_m$ ir todėl sistema jau nėra tiesiškai nepriklausoma.

Pasirodo, tada (kai k_1 - kartotinė šaknis), funkcijos

$$e^{k_1x}, xe^{k_1x}, \cdots, x^{m-1}e^{k_1x}$$

bus lygties (5.1) sprendiniai, sudarantys tiesiškai nepriklausomų sprendinių sistemą bet kuriame intervale (a,b).

5.5 pavyzdys. $y'' - 2y' + y = 0$

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \quad k = 1,\ m = 2$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x = e^x(c_1 + c_2x)$$

5.4 pavyzdys. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0$

$(k+1)^3 = 0, \quad k = -1$ - 3-čio kartotinumo šaknis

$y = e^x (c_1 + c_2 x - c_3 x^2)$

Tegul lygties (5.1) koeficientai p_l realūs, o $k_1 = \alpha + i\beta$ - charakteringosios lygties m-ojo kartotinumo šaknis. Tada $\overline{k_1} = \alpha - i\beta$ irgi bus m – kartotinumo šaknis. Tada gauname funkcijų sistemas

$e^{\alpha+i\beta}, xe^{\alpha+i\beta}, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha+i\beta}$

$e^{\alpha-i\beta}, xe^{\alpha-i\beta}, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha-i\beta}$

$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

5.7 pavyzdys. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

$k^4 + 2k^2 + 1 = 0$

$(k^2+1)^2 = 0, \quad k = \pm i \quad (m = 2)$

$y = c_1\cos x + c_2 x\cos x - c_3\sin x + c_4 x\sin x)$

Bendru atveju galima tvirtinti, kad charakteringosios lygties šaknį k_j atitinka (5.1) lygties fundamentinės sprendinių sistemos sprendinių grupė $\{e^{k_j x}, xe^{k_j x}, \ldots, x^{l_j - 1}e^{k_j x}\}$. Čia $l_j \equiv k_j$ šaknies kartotinumas, be to $\sum_{j=1}^{m} l_j = n$.

Jeigu k_j - kompleksinė l_j kartotinumo šaknis, $k_j = \alpha_j + i\beta_j$, tai ją, kartu su jai jungtine šaknimi $\bar{k}$ atitinka realiųjų funkcijų grupė

$$\begin{array}{l} e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, \ldots, x^{l_j - 1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x \\ e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, \ldots, x^{l_j - 1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x \end{array}.$$