4. paskaita. Aukštesniųjų eilių tiesinės diferencialinės lygtys.

4.1. Tiesinė n-osios eilės DL. Tiesinis diferencialinis operatorius

Tiesine n-tosios eilės diferencialine lygtimi vadinama lygtis

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x) \qquad (4.1)$$
$$a < x < b,$$

kur $f(x), p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ - duotos tolydžios intervale (a,b) funkcijos. Kairiąją lygties (4.1) pusę pažymėsime $L_n[y] \equiv L[y]$ ir vadinsime n-tosios eilės tiesiniu diferencialiniu operatoriumi.

Operatorius L(y) pasižymi tokiomis savybėmis:

1) $L[cy] = cL[y]$ (homogeniškumas)

2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ (adityvumas)

Homogeniškas adityvus operatorius yra vadinamas **tiesiniu**. Tų savybių pagrindu gauname, kad yra teisinga lygybė

$$L\left[\sum_{k=1}^{m} c_k y_k\right] = \sum_{k=1}^{m} c_k L[y_k] \;, \qquad (4.2)$$

kur c_k - laisvos konstantos.

4.1. pavyzdys. Tegul $L[y] = y'' + y$

Tada $L[\sin x] = -\sin x + \sin x = 0$, $L[x^2] = 2 + x^2$

Lygtį (1) galima perrašyti

$L[y] \equiv L_n[y] = f(x)$, $a < x < b$

Jeigu $f(x) \equiv 0$, tai lygtis

$$L_n[y] = 0 \,,\; a < x < b \qquad (4.3)$$

yra vadinama **tiesine homogenine n-tos eilės diferencialine lygtimi**. Lygtis (4.1), kur f nėra tapatingai lygus nuliui, yra vadinama **nehomogenine**.

4.2. Sprendiniai ir jų savybės

Jeigu $f(x), p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ yra tolydžios intervale (a,b), tai galima įrodyti, kad diferencialinė lygtis (4.1) turi vienintelį sprendinį tame pačiame intervale (a,b), tenkinantį pradines sąlygas

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Be to, jei funkcijos $p_j(x)$ ir $f(x)$ turi intervale (a,b) q - eilės tolydžias išvestines, tai nurodytas sprendinys y(x) turi intervale (a,b) tolydžias išvestines iki n+q eilės imtinai.

Teorema 4.1. Jeigu $y_1, \ldots, y_m$ yra homogeninės lygties (4.3) sprendiniai, tai jų tiesinis darinys $\sum_{k=1}^{m} c_k y_k$ taip pat yra (4.3) lygties sprendinys.

Funkcijos $y_1(x),\dots,y_m(x)$ yra vadinamos tiesiškai priklausomomis intervale (a,b), jeigu viena jų yra kitų tiesinis darinys $\forall x \in (a,b)$:

$\alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_m y_m(x) \equiv 0, \quad a < x < b$

Apibrėžimas 4.1 n tiesiškai nepriklausomų intervale (a,b) homogeninės n-tos eilės lygties (4.3) su tolydžiais koeficientais $p_j(x)$ sprendinių yra vadinama tos lygties **fundamentine sprendinių sistema**.

4.3 Vronskio determinantas

Ištirsime funkcijų tiesinio priklausomumo sąlygas.

Teorema 4.2. Jeigu funkcijos $y_1(x),\dots,y_m(x)$ tiesiškai priklausomos intervale (a,b), tai determinantas

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & ,\dots, & y_m(x) \\ y_1'(x) & ,\dots, & y_m'(x) \\ & \vdots & \\ y_1^{(m-1)}(x), & \dots, & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad \left(\forall x \in (a,b)\right) \tag{4.4}$$

Determinantas (4.4) yra vadinamas Vronskio determinantu (Wronski) ir yra žymimas $W(x) \equiv W[y_1,\dots,y_m]$.

4.2 pavyzdys.

$$1) W[1, x, \dots, x^{m-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{m-1} \\ 0 & 1 & 2x & \dots & (m-1)x^{m-2} \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (m-1)! \end{vmatrix} = 1 \cdot 1! \cdot 2! \cdots (m-1)! \neq 0$$

Taigi $1, x, \dots, x^{m-1}$ yra tiesiškai nepriklausomos $\forall (a,b)$.

4.3. pavyzdys. Tegul $k,\dots,k_m$ - skirtingi skaičiai. Tada

$$W[e^{k_1 x},\dots,e^{k_m x}] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & \dots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & \dots & kme^{k_m x} \\ & \dots & \\ k_1^{(m-1)} e^{k_1 x} & \dots & k_m^{(m-1)} e^{k_m x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+\dots+k_m)x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ k_1 & \dots & k_m \\ & \dots & \\ k^{m-1} & \dots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Todėl funkcijos $e^{k_1 x},\dots,e^{k_m x}$ yra tiesiškai nepriklausomos.

4.4 pavyzdys. $e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{m-1}e^{kx}$ taip pat yra tiesiškai nepriklausomos, kadangi

$\alpha_1 e^{kx} + \dots + \alpha_m x^{m-1} e^{kx} = e^{kx}\left[\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_m x^{m-1}\right]$

4.2 – 4.4 pavyzdžiuose nagrinėjamos funkcijų sistemos toliau bus reikalingos tiesinių DL su pastoviais koeficientais sprendinių konstrukcijai.

4.4. Teoremos apie bendrojo sprendinio struktūrą.

Teorema 4.3. Tam, kad tiesinės homogeninės n-tos eilės lygties $L_n[y] = 0$ su tolydžiais koeficientais sprendiniai $y_1(x),\dots,y_n(x)$ būtų tiesiškai nepriklausomi intervale (a,b) yra būtina ir pakankama, kad $W[y_1,\dots,y_n] \neq 0$ visiems $x \in (a,b)$.

Teorema 4.4. (Tiesinės homogeninės n-osios eilės lygties bendrojo sprendinio struktūra). Jeigu $y_1, \dots, y_n$ - tiesiškai nepriklausomi intervale (a,b) tiesinės homogeninės n-tos eilės lygties $L_n[y] = 0$ su tolydžiais tame intervale koeficientais sprendiniai, tai funkcija

$$y(x) = \sum c_k y_k(x), \quad a < x < b, \tag{4.5}$$

kur c_k - laisvos konstantos, yra lygties $L_n[y] = 0$ sprendinys ir atvirkščiai, bet kuris tos lygties sprendinys yra išreiškiamas (4.5) pavidalu, parinkus atitinkamas konstantas c_k.

Taigi n-osios eilės tiesinės homogeninės (4.3) lygties bendrasis sprendinys turi pavidalą

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x),$$

kur $y_k(x)$ - atskirieji (4.3) sprendiniai, sudarantys fundamentinę sistemą, o c_k - laisvos konstantos.

Teorema 4.5. (Tiesinės nehomogeninės n-osios eilės lygties bendrojo sprendinio struktūra). (4.1) nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys yra suma kurio nors jos atskirojo sprendinio ir homogeninės lygties bendrojo sprendinio:

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)$$