3. paskaita. Aukštesniųjų eilių diferencialinės lygtys.

3.1. n-osios eilės paprastosios DL apibrėžimas. Koši uždavinys
3.2. Sprendinio egzistavimo ir vienaties teorema
3.3. Kai kurių aukštesniųjų diferencialinių lygčių sprendimas eilės pažeminimo metodu

3.1. n-osios eilės paprastosios DL apibrėžimas. Koši uždavinys

Lygtis

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

yra vadinama diferencialine n-osios eilės lygtimi.

Čia $F(x, v_0, v_1, \dots, v_n)$ - n+2 kintamųjų funkcija, tolydi kartu su savo dalinėmis išvestinėmis n+2-matės erdvės srityje Ω.

$$\frac{\partial F}{\partial v_0}, \frac{\partial F}{\partial v_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial v_n}$$

Išreikšdami $y^{(n)}$, gauname

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{3.2}$$

(3.1) lygties pavidalas vadinamas **neišreikštiniu,** o pavidalas (3.2) – **išreikštiniu**. Pradinis (Koši) uždavinys (3.2) lygčiai: formuluojamas taip: rasti funkciją y(x), tolydžiai diferencijuojamą n kartų, tenkinančią (3.2) lygtį ir sąlygas

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{3.3}$$

Dešinėje pastarųjų lygybių pusėje užduodamos konkrečios nežinomos funkcijos ir jos išvestinių reikšmės taške x_0.

3.2. Sprendinio egzistavimo ir vienaties teorema

Teorema 3.1. (Egzistavimo ir vienaties teorema.) Tegul lygties (3.2) dešinioji pusė $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, suprantama kaip n+1 kintamojo funkcija, yra tolydi ir turi tam tikroje taško $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ aplinkoje Ω_0 tolydžias dalines išvestines $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$. Tada egzistuoja intervalas (a,b) ir apibrėžta jame n kartų diferencijuojama funkcija $y = y(x)$, tenkinanti (3.2) lygtį ir pradines sąlygas $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Funkcija $y = y(x)$ turinti nurodytas savybes yra vienintelė.

Taigi, y(x) yra (3.2) lygties sprendinys, tenkinantis (3.3) pradines sąlygas.

Jeigu fiksuosime x_0 lygtyje (3.2) tai, įvedę žymenis

$$c_1 = y_0, c_2 = y_0', \dots, c_n = y_0^{(n-1)}$$

$(x_0, c_1, \dots, c_n) \in \Omega,$ turėsime priklausomybę $y = y(x, c_1, \dots c_n)$

Jei įvesime žymenis $y=y_1$, $y_1'=y_2, \dots,$ $y_1^{(n-1)}=y_n$, tai (3.2) lygtį galėsime užrašyti 1-os eilės diferencialinių lygčių sistemos pavidalu:

$$
\begin{cases}
y_1' = y_2 \\
y_2' = y_3 \\
\dots \\
y_{n-1}' = y_n \\
y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})
\end{cases}
\qquad (3.4)
$$

Bendresnis n-osios eilės diferencialinių lygčių sistemos pavidalas yra toks:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dx} = \varphi_1(x, y_1, \dots, y_n) \\
\vdots \\
\dfrac{dy_n}{dx} = \varphi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad ,\big((x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega\big)
\end{cases}
\qquad (3.5)
$$

Yra teisinga analogiška egzistavimo ir vienaties teorema ir bendro pavidalo sistemai (3.5).

3.3. Kai kurių aukštesniųjų diferencialinių lygčių sprendimas eilės pažeminimo metodu

Kai kada aukštesniųjų eilių diferencialines lygtis galima analiziškai išspręsti **eilės pažeminimo metodu**. To metodo esmė yra ta, kad pakeitus kintamuosius duotoji DL suvedama į žemesnės eilės lygtį. Pademonstruosime tai keliais pavyzdžiais.

3.3.1. Tegul turime lygtį

$$y'' = f(x) \qquad (3.6)$$

Eilę galima pažeminti įvedant naują funkciją *p(x)*, laikant, kad $y' = p(x)$. Tada $y'' = p'(x)$ ir gauname pirmos eilės DL $p' = f(x)$. Išsprendę ją, t.y., radę funkciją *p=p(x)*, išspręsime lygtį $y' = p(x)$ ir gausime bendrąjį (3.6) lygties sprendinį.

Dažniausiai šis uždavinys sprendžiamas dar paprasčiau: DL eilė pažeminama nuosekliai integruojant lygtį.

Kadangi $y'' = (y')' = \dfrac{dy'}{dx}$, (3.6) lygtį galima užrašyti pavidalu $dy' = f(x)dx$. Tada, integruodami lygtį $y'' = f(x)$, gausime $y' = \int f(x)dx$ arba $y' = \varphi_1(x) + c_1$. Toliau, integruodami gautąją lygtį pagal x, gausime $y = \int(\varphi_1(x) + c_1)dx$, t.y. $y = \varphi_2(x) + c_1 x + c_2$ - bendrasis duotosios lygties sprendinys.

Jeigu duota lygtis

$y^{(n)}=f(x)$,

tai, suintegravę ją paeiliui n kartų, rasime lygties bendrąjį sprendinį

$$y = \varphi_n(x) + c_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_n$$

3.1. pavyzdys. Rasti lygties $y^{IV}=sin2x$ sprendinį

Sprendimas. Keturis kartus nuosekliai integruodami duotąją lygtį, gausime

$$y''' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1$$

$$y'' = \int -\frac{1}{2}\cos 2x dx + \int c_1 dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2$$

$$y' = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

3.3.2. tegul turime lygtį

$$y'' = f(x, y'), \qquad (3.7)$$

į kurią **išreikštiniu būdu neįeina funkcija y**.

Pažymėsime $y' = p$, kur *p=p(x)* – nauja nežinoma funkcija. Tada $y'' = p'$ ir (3.7) lygtis įgauna pavidalą $p' = f(x, p)$. Tegul $p = \varphi(x, c_1)$ - gautos pirmos eilės DL bendrasis sprendinys. Keisdami funkciją p į funkciją y' gausime DL: $y' = \varphi(x, c_1)$. Jos bendrasis sprendinys bus $y = \int \varphi(x, c_1)dx + c_2$.

(3.7) lygties daliniu atveju yra lygtis

$$y'' = f(y'), \qquad (3.8)$$

į kurią neįeina ir nepriklausomasis kintamasis x.

Ją galima integruoti lygiai taip pat:

$y' = p(x)$, $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$. Gauname lygtį su atskiriamaisiais kintamaisiais: $p' = f(p)$.

Jeigu duota lygtis

$$F\left(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \ldots; y^{(n)}\right) = 0, \qquad (3.9)$$

į kurią išreikštiniu būdu neįeina funkcija y ir jos išvestinės iki (k-1) eilės imtinai, tai lygties eilę galima sumažinti k vienetų, įvedant žymenį $y^{(k)}=p(x)$. Tada $y^{(k+1)} = p', \ldots, y^{(n)} = p^{(n-k)}$ ir (3.9) lygtis įgaus pavidalą $F\left(x; p, p', \ldots, p^{(n-k)}\right) = 0$.

Lygties (3.9) daliniu atveju yra lygtis

$$F\left(x; y^{(n-1)}; y^{(n)}\right) = 0$$

arba

$$y^{(n)} = f\left(x; y^{(n-1)}\right)$$

Padarius keitinį $y^{(n-1)} = p(x), y^{(n)} = p'$ ši lygtis suvedama į pirmos eilės DL.

3.2. pavyzdys. Išspręsti lygtį $y'' - \frac{y'}{x} = 0$

Sprendimas. Pažymime $y' = p$, kur *p=p(x)*, $y'' = p'$.

Tada $p' - \frac{p}{x} = 0$. Tai lygtis su atskiriamaisiais kintamaisiais: $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}, \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$. Integruodami gausime $ln|p|=ln|x|+ln|c_1|$, $ln|p|=ln|c_1x|$, $p=c_1x$. Grįždami prie kintamojo y, gausime $y' = c_1 x$, $y = c_1\frac{x^2}{2} + c_2$, o tai ir yra duotosios lygties bendrasis sprendinys.

3.3.3. Tegul turime lygtį

$$y'' = f(y, y'), \qquad (3.10)$$

į kurią išreikštiniu būdu neįeina nepriklausomasis kintamasis x.

Tam, kad pažeminti lygties eilę, įvesime naują funkciją *p=p(y)*, priklausančią nuo kintamojo y, laikydami, kad $y' = p$. Pastarąją lygybę diferencijuojame pagal x, žinodami, kad *p=p(y(x))*:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(p(y))}{dx} = \frac{d(p(y))}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d(p(y))}{dy}\cdot p,$$

t.y., $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Dabar lygtis (3.10) įgauna pavidalą $p\dfrac{dp}{dy} = f(y;p)$. Tegul $p = \varphi(y, c_1)$ - šios pirmos eilės DL bendrasis sprendinys. Keisdami *p(y)* į y', gausime $y' = \varphi(y, c_1)$ - lygtį su atskiriamaisiais kintamaisiais. Ją integruodami gausime (3.10) lygties bendrąjį integralą:

$$\int \frac{dy}{\varphi(x, c_1)} = x + c_2$$

Daliniu (3.10) lygties atveju yra DL

$$y'' = f(y)$$

Šią lygtį irgi galima išspręsti darant keitinį $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$.

Lygiai tą patį darome spręsdami lygtį $F\left(y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}\right) = 0$. Jos eilę galima sumažinti vienetu, laikant, kad $y' = p$, kur *p=p(y)*. Pagal sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklę gauname $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Po to gauname

$$y''' = \frac{d}{dx}(p \cdot p'_y) = \frac{d}{dy}(p \cdot p'_y) \cdot \frac{dy}{dx} = p\left((p'_y)^2 + p \cdot p''_{yy}\right) \text{ ir t.t.}$$