2. paskaita. Kai kurių pirmosios eilės diferencialinių lygčių sprendimas

2.1. Lygtys su atskiriamaisiais kintamaisiais

Tegul turime diferencialinę lygtį

$y' = f(x,y)$ arba $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y).$

Jos apibendrinimas yra DL

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Tokios DL sprendiniu vadinsime:

a)funkciją *y=y(x)* tokią, kad

$$M\big(x,y(x)\big)dx + N\big(x,y(x)\big)y'dx = 0$$

arba

b)funkciją *x=x(y)* tokią, kad

$$M(x(y),y)\frac{dx}{dy} + N(x(y),y) = 0$$

Jeigu $M(x,y)$ ir $N(x,y)$ abi nelygios 0, tai sprendinį galima išreikšti tiek formule $y = y(x)$, tiek ir formule $x = x(y)$.

Tarkime, kad $M(x,y) = \varphi(x) \quad x \in (a,b)$

$N(x,y) = \psi(y) \quad y \in (c,d)$

Tada turime lygtį

$$\varphi(x)dx + \psi(y)dy = 0, \tag{2.1}$$

kur (x,y) priklauso stačiakampiui $\Delta = \begin{Bmatrix} a < x < b \\ c < y < d \end{Bmatrix}$.

Ją išspręsime **kintamųjų atskyrimo metodu**. Tuo tikslu vienoje lygybės pusėje, pavyzdžiui, kairėje, paliekame narį, priklausantį tiktai nuo x ir nuo dx, o kitoje lygybės pusėje – narį, priklausantį nuo y ir nuo dy.

$$\varphi(x)dx = -\psi[y(x)]dy(x)$$

Turėdami omenyje, kad y=y(x), matome, kad gavome dviejų (kol kas nežinomų) funkcijų diferencialų lygybę. Iš matematinės analizės žinome, kad jeigu funkcijų diferencialai yra lygūs, tai pačios funkcijos skiriasi tik konstanta. Todėl gauname

$$\int\varphi(x)dx = -\int\psi\big(y(x)\big)dy(x) + c_1 = -\int\psi(y)dy + c$$

$$\int\varphi(x)dx = \Phi(x),\ a < x < b \qquad \int\psi(y)dy = \Psi(y),\ c < y < d.$$

$$\int\varphi(x)dx + \int\psi(y)dy = c$$

$$\underbrace{\Phi(x) + \Psi(y)}_{F(x,y)} = C \tag{2.2}$$

Matome, kad (2.2) išraiška yra (2.1) DL bendrasis integralas. Be to

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x)\,,\ \frac{\partial F}{\partial y} = \psi(y)$$

Jeigu (2.2) diferencijuosime pagal x, laikydami, kad $y = y(x)$, tai gausime $\varphi(x)dx + \psi(y)dy = 0$ - taigi - (2.1) lygtį.

2.1. pavyzdys. $x^2dx = ydy \qquad \int x^2dx = \int ydy \qquad \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = c$ - bendras integralas

Tegul $M(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y)$, $N(x,y) = \varphi_2(x)\psi_2(y)$

Tada vėlgi turime lygtį su atsiskiriamaisiais kintamaisiais.

Tiems (x,y), kuriems $\varphi_2(x)\psi_1(y) \neq 0$ padalinsime abi lygties puses iš $\varphi_2(x)\psi_1(y)$. Gausime

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy = 0$$

Bendrasis integralas yra gaunamas panašiai kaip ir anksčiau nagrinėtu atveju, tačiau galimi ir kiti sprendiniai, einantys per taškus (x_0, y_0), kuriuose $\varphi_2(x_0)\psi_1(y_0) = 0$.

2.2. Homogeninės diferencialinės lygtys.

F-ja $M(x,y)$ yra vadinama homogenine m laipsnio funkcija, jeigu $\forall\, x, y$ ir $t > 0$ teisinga lygybė

$$M(tx,ty) = t^m M(x,y)$$

Jeigu M ir N yra homogeninės tos pačios eilės m f-jos, tai diferencialinė lygtis

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{2.3}$$

yra vadinama homogenine. Ją galima pertvarkyti taip:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{M\left(x, |x|\frac{y}{|x|}\right)}{N\left(x, |x|\frac{y}{|x|}\right)} = \frac{|x|^m M\left(\pm 1, \pm\frac{y}{x}\right)}{|x|^m N\left(\pm 1, \pm\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ t.y.}$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.4}$$

kur f – vieno kintamojo funkcija.

Įvesime vietoj y naują funkciją z(x) keitinio

$y = x \cdot z$ pagalba. Tada $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}, \qquad z = \frac{y}{x}$

ir lygtis įgauna pavidalą

$$x\frac{dz}{dx} + z = f(z) \qquad xdz + zdx = f(z)dx$$

$$xdz = [f(z) - z]dx \qquad \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} \qquad \ln\left|\frac{x}{c}\right| = \int \frac{dz}{f(z) - z}, \qquad x = ce^{\int \frac{dz}{f(z) - z}}$$

Analogiškai galima spręsti ir bendresnį homogeninių lygčių atvejį

$$\frac{dy}{dx} = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right) \qquad (2.5)$$

$$\frac{y}{x^{\alpha}} = z$$

$$y = x^{\alpha} z \,, \ \frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} z + x^{\alpha} \frac{dz}{dx} ,$$

$$\alpha x^{\alpha-1} z + x^{\alpha} \frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1} f(z)$$

$$x^{\alpha} \frac{dz}{dx} = x^{\alpha-1}[f(z) - \alpha z]$$

$$x \frac{dz}{dx} = f(z) - \alpha z \,; \quad \frac{dz}{f(z) - \alpha z} = \frac{dx}{x} , \ x = ce^{\int \frac{dz}{f(z)-\alpha z}}$$

2.3. Tiesinė diferencialinė lygtis.

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = f(x) \,, \quad a < x < b \qquad (2.6)$$

Čia p(x) ir f(x) – tolydžios x funkcijos intervale (a,b). Tiesine šią lygtį vadiname todėl, kad y' ir y įeina į ją tiesiškai, t.y., pirmuoju laipsniu.

Jeigu $f(x) \equiv 0$, tai (2.6) vadiname **tiesine homogenine**, jeigu f(x) nėra tapatingai lygi nuliui intervale (a,b) – tai – tiesine nehomogenine.

Tiesinė homogeninė lygtis turi sprendinį $y \equiv 0$. Be to ji yra lygtis su atskiriamaisiais kintamaisiais, todėl ją galima spręsti anksčiau aprašytu būdu. Tegul turime tiesinę homogeninę DL:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) y = 0 \qquad (2.7)$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \,, \ y \neq 0 \quad \ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int p(x)dx \,, \ c \neq 0$$

$y(x) = ce^{-\int p(x)dx}$. Jei $c = 0$, tai $y(x) \equiv 0$.

Pastebėsime, kad išskyrus pastarąjį atvejį tiesinės DL sprendiniai nekerta x ašies. Galime išreikšti neapibrėžtą konstantą c:

$$c = ye^{\int p(x)dx} \qquad (2.8)$$

Dešinėje pusėje yra funkcija, turinti tolydžias išvestines juostoje $a < x < b$, $-\infty < y < \infty$

Todėl į bendrąjį integralą (2.8) įeina visi lygties (2.6) sprendiniai.

Panagrinėsime dabar nehomogeninę lygtį (2.6). Ją galima spręsti dviem būdais - Bernulio ir Lagranžo (konstantos varijavimo). Spręsdami Bernulio metodu jos sprendinio ieškosime pavidalu

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Tada

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$$

$$u(v' + p(x)v) + u'v = f(x)$$

Parinksime v tokią, kad $v' + p(x)v = 0$. Turime tiesinę homogeninę lygtį v atžvilgiu, taigi,

$v(x) = e^{-\int p(x)dx}$ (pasirenkame $c = 1$)

Tada turime

$$u'v(x) = f(x) \Rightarrow u' = \frac{f(x)}{v(x)}, u = \int \frac{f(x)}{v(x)} dx + c$$

$$u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c$$

$y = uv = \left(\int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + c \right) e^{-\int p(x)dx} = ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx$ kur c – laisva konstanta

2.2 pavyzdys. $y' - y = \sin x$

$p(x) = -1$, $f(x) = \sin x$

$$y = uv \quad y' = u'v + uv' \quad u'v + uv' - uv = \sin x$$

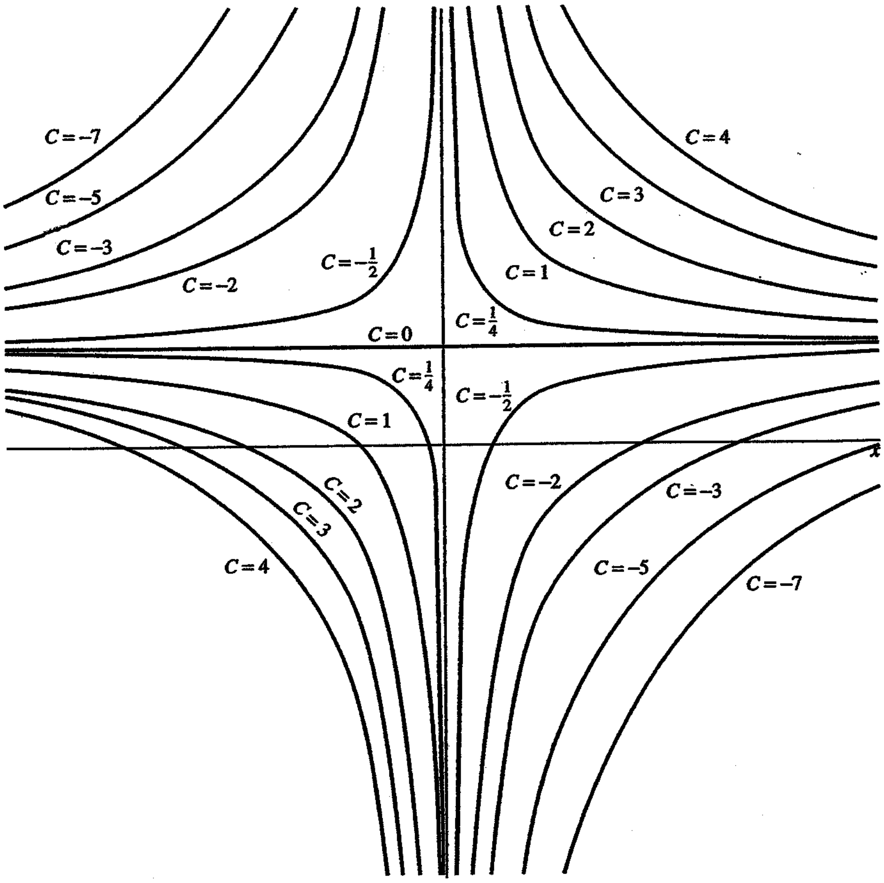
$$u(v' - v) + u'v = \sin x \quad v' - v = 0 \quad v = e^{\int dx} = e^x$$

$$u'e^x = \sin x \quad u' = e^{-x} \sin x \quad u = \int e^{-x} \sin x dx + c$$

$$y = e^x \int e^{-x} \sin x dx + ce^x$$

$$y = ce^x - \frac{1}{2} (\cos x + \sin x)$$

Spręsdami konstantos varijavimo metodu imame homogeninės lygties sprendinio pavidalą ir laikome, kad $c = c(x)$. Tada $y = c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$. Pastebėsime, kad šis metodas sutampa su Bernulio metodu, kur $u = c(x)$, $v = e^{-\int p(x)dx}$.



1 pav. Lygties $x\dfrac{dy}{dx}+y=1$ kai kurie sprendiniai. Bendrasis šios lygties sprendinys

$$y(x)=1+\frac{c}{x}$$

2.4. Bernulio lygtis.

Bernulio lygtimi yra vadinama DL

$$y'+p(x)y=y^{\alpha}f(x) \tag{2.9}$$

čia $\alpha\neq 0{,}1$, kadangi priešingu atveju gauname anksčiau išnagrinėtą tiesinę lygtį.

Darome keitinį $z=y^{1-\alpha}:y=z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Turime $z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'\Rightarrow y'=\dfrac{1}{1-\alpha}z'y^{\alpha}$

$$y^{\alpha}=z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},\quad y'=\frac{1}{1-\alpha}z'\cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}f(x)\qquad \Big|\, z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}z'+p(x)\cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}}=f(x)\qquad \frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{1-\alpha}{1-\alpha}=1$$

$$z'+(1-\alpha)p(x)\cdot z=(1-\alpha)f(x)$$

2.5 Lygtys pilnais diferencialais

Jeigu egzistuoja dviejų kintamųjų funkcija F(x,y), tokia, kad (2.3) lygtyje turime $M(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$, $N(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}$, tai ši lygtis įgauna pavidalą

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0 \text{ arba } dF=0 \tag{2.10}$$

Tada galime tvirtinti, kad $F=c$, kur c - laisva konstanta. Taigi, $F(x,y)=c$ yra diferencialinės lygties $Mdx+Ndy=0$ bendrasis integralas.