Paprastosios diferencialinės lygtys

1. paskaita. Pagrindinės diferencialinių lygčių sąvokos.

1.1 Diferencialinės lygties sąvoka

Sprendžiant įvairius matematikos, gamtos, technikos bei kitų mokslų uždavinius dažnai naudojami matematiniai modeliai, užrašomi lygtimis, į kurias įeina nepriklausomasis kintamasis, ieškoma funkcija ir jos išvestinės. Tokios lygtys vadinamos diferencialinėmis. Diferencialinės lygties (DL) sprendiniu yra vadinama funkcija, kuri, įstatyta į lygtį, paverčia ją tapatybe.

Pavyzdžiui, diferencialinės lygties $y' = f(x)$ sprendiniu yra funkcija $y = F(x)$, kur $F(x)$ - funkcijos $f(x)$ pirmykštė.

Pateiksime kai kurias bendras diferencialinių lygčių (DL) sąvokas.

Jeigu ieškomoji (nežinomoji) funkcija priklauso nuo vieno kintamojo, tai tokia DL vadinama **paprastąja diferencialine lygtimi**, kitais atvejais – **dalinių išvestinių DL**. Toliau nagrinėsime vien tiktai paprastąsias DL.

Aukščiausia įeinančios į lygtį išvestinės eilė yra vadinama tos lygties eile.

Pavyzdžiui, lygtis $y''' - 3y' + y = 0$ yra trečios eilės paprastoji DL, o lygtis $xy' + y^3 = xy$ - pirmos eilės. Tuo tarpu lygtis $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ - antros eilės dalinių išvestinių lygtis.

Diferencialinės lygties sprendinio (arba visos sprendinių aibės) radimo procesas yra vadinamas DL **integravimu**, o vieno kurio nors sprendinio grafikas – **integraline kreive**.

1.2 Matematinių modelių, aprašomų diferencialinėmis lygtimis, pavyzdžiai

1.2.1. Kūnas, kurio temperatūra lygi θ_0, laiko momentu $t = 0$ į aplinką, kurios temperatūra lygi a, šils arba vės priklausomai nuo skirtumo $a - \theta_0$ ženklo. Taigi, kūno temperatūra – tai laiko t funkcija. Žymėsime ją $\theta = \theta(t)$. Pagal fizikos dėsnį (kuris dažnai vadinamas Niutono dėsniu) atvėsimo (įšilimo) greitis yra proporcingas kūno ir aplinkos temperatūrų skirtumui. Taigi, turime lygtį

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta(t) - a), \tag{1.1}$$

kur $k > 0$ - proporcingumo koeficientas be to

$\theta(0) = \theta_0$

Pastaroji lygybė yra vadinama (1.1) diferencialinės lygties **pradine sąlyga** (kitaip – pradine sąlyga diferencialinei lygčiai).

Norint rasti kūno temperatūrą bet kuriuo laiko momentu $t > 0$, reikia spręsti (1.1) DL, įskaitant pradinę sąlygą.

1.2.2. Izoliuotos populiacijos dinamika paprasčiausiai modeliuojama **Maltuso** lygtimi

$$\frac{dN}{dt} = (b - d)N, \quad N(0) = N_0 \tag{1.2}$$

Čia $N = N(t)$ - populiacijos individų skaičius, t – laikas, b ir d – atitinkamai “gimimų” ir “mirčių” koeficientai. Šio modelio pagrindinė prielaida yra ta, kad kiekvienu laiko populiacijos augimo (nykimo) greitis yra proporcingas populiacijos narių skaičiui. Be to čia diskretusis dydis – populiacijos individų skaičius pakeistas dydžiu N, įgyjančiu realias teigiamas (tai paaiškės iš lygties sprendinio išraiškos) reikšmes.

1.2.3. Radžio (arba kitos radioaktyvios medžiagos) skilimo greitis proporcingas tos medžiagos kiekiui. Tai – atomo fizikos dėsnis. Jo matematinė išraiška – tai radioaktyvaus skilimo DL:

$$\frac{dR}{dt} = -cR,\ c > 0, \qquad R(0) = R_0 \tag{1.3}$$

Čia $R = R(t)$ - radioaktyvios medžiagos kiekis (masė) laiko momentu t.

1.2.4 Materialus masės m taškas, įtvirtintas spyruoklėje su fiksuotais galais juda x ašies kryptimi.

Laikysime, kad spyruoklės masė lygi nuliui. Tada materialaus taško judėjimo lygtis yra gaunama iš jėgų pusiausvyros dėsnio (Dalambero principo) ir turi pavidalą

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = f(t) \tag{1.4}$$

Čia $m\frac{d^2x}{dt^2}$ - inercijos jėga, $a\frac{dx}{dt}$ - terpės (pvz., oro) pasipriešinimo jėga, bx - spyruoklės pasipriešinimo jėga (Huko dėsnis), $f(t)$ - kurios nors prigimties (pvz., mechaninės) išorinė jėga. Vėliau matysime, kad vienareikšmiškam materialaus taško koordinačių bet kuriuo laiko momentu nustatymui pradiniu laiko momentu turime užduoti dvi pradines sąlygas, pvz.: $x(0) = x_0$, $\frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = v_0$. Taigi, šiame pavyzdyje turime antros eilės paprastąją DL.

1.3 Diferencialinės lygties apibrėžimas. Diferencialinių lygčių sprendiniai

Paprastąja n-tosios eilės diferencialine lygtimi vadinsime lygtį

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.5}$$

Čia $F = F(x, y, p_1, p_2, \dots, p_n)$ - n+2 kintamųjų funkcija, kurios apibrėžimo sritis $D \subset R^{n+2}$.

(1.5) lygties sprendiniu vadinama funkcija $y = y(x)$, kuri tam tikrame nepriklausomojo kintamojo x kitimo intervale (a,b) turi tolydžias išvestines iki n-tosios eilės imtinai ir tenkina (1.5) lygtį. Tai reiškia, kad $\forall x,\ x \in (a,b)$ tenkinama tapatybė

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$$

Toliau nagrinėsime 1-os eilės diferencialines lygtis

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.6}$$

Lygtis $F_1(x, y, y') = 0,\ F_2(x, y, y') = 0$ vadinsime ekvivalenčiomis srityje $D \subset R^3$, jeigu yra ekvivalenčios atitinkamos algebrinės lygtys $F_1(x, y, z) = 0$ ir $F_2(x, y, z) = 0$ (t.y., jomis aprašomos taškų aibės erdvėje R^3 sutampa).

Jeigu (1.6) lygtį galima vienareikšmiškai išspręsti y' atžvilgiu, gauname taip vadinamą **išreikštinį** pirmos eilės DL pavidalą:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.7}$$

Toliau daugiausiai nagrinėsime būtent šį lygties pavidalą.

(1.7) lygtis nusako ryšį (priklausomybę) tarp taško (x,y) koordinačių ir integralinės kreivės liestinės krypties koeficiento y' tame taške. Taigi, DL $y' = f(x, y)$ apibrėžia **krypčių lauką** plokštumoje Oxy. Tokia yra pirmos eilės DL geometrinė prasmė.

Plokštumos Oxy kreivė, kurios kiekviename taške lauko kryptis yra viena ir ta pati, yra vadinama **izoklina**. Izoklinas galima panaudoti integralinių kreivių (apytikriam) konstravimui. Izoklinos lygtį galima gauti užfiksavus $y' = c$, t.y.,

$$f(x, y) = c$$

<u>1.1. pavyzdys</u>. Izoklinų pagalba pavaizduosime lygties $y' = 2x$ integralinių kreivių bendrą pavidalą.

Sprendimas. Šios lygties izoklinų lygtys yra $2x = c$, t.y., šiuo atveju izoklinos yra tiesės, lygiagrečios Oy ašiai $\left(x = \frac{c}{2}\right)$. Tų tiesių taškuose atidėsime kryptis, sudarančias su ašimi Ox vieną ir tą patį kampą α, kurio tangentas lygus c.

Kai $c = 0$, turime $x = 0, tg\alpha = 0$, todėl $\alpha = 0$

Kai $c = 1$, izoklinos lygtis yra $x = \frac{1}{2}, tg\alpha = 1, \alpha = \frac{\pi}{4}$

Kai $c = -1$, $x = -\frac{1}{2}, tg\alpha = -1, \alpha = -\frac{\pi}{4}$

Kai $c = 2, x = 1, tg\alpha = 2, \alpha = arctg 2$

Nubraižę keturias izoklinas ir atidėję ant kiekvienos keletą strėlių, vienodai pakrypusių link Ox ašies, pagal jų kryptį brėžiame linijas. Tai ir yra apytikris integralinių kreivių vaizdavimas. Matome, kad šiuo atveju integralinės kreivės – parabolių šeima.

Pirmos eilės diferencialinę lygtį, išreikštą išvestinės atžvilgiu, galima užrašyti **diferencialiniu pavidalu**:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (1.8)$$

kur $P(x, y)$, $Q(x, y)$ - žinomos funkcijos. (1.8) lygtis patogi tuo, kad kintamieji x ir y joje lygiateisiai, t.y. bet kurį jų galima nagrinėti, kaip kito kintamojo funkciją. Pažymėsime, kad nuo vieno DL pavidalo galima pereiti prie kito.

1.2. pavyzdys. Lygtis

$$y' = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

dar gali būti užrašyta kaip

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}, \ x^2 dx = (x^2 + y^2)dy$$

Diferencialinės lygties integravimas bendru atveju duoda begalinę sprendinių aibę. Pavyzdžiui, mūsų nagrinėta lygtis $y' = 2x$ turi sprendinį $y = x^2$, tačiau ir bet kuri kita funkcija, turinti pavidalą $y = x^2 + c$, kur c – konstanta, tenkina šią lygtį.

Tam, kad diferencialinės lygties sprendinys turėtų konkrečią prasmę, reikia pareikalauti, kad jis tenkintų tam tikras papildomas sąlygas.

Sąlyga, kad kai $x=x_0$ funkcija y turi būti lygi duotam skaičiui y_0, t.y., $y=y_0$ yra vadinama **pradine sąlyga**. Pradinė sąlyga yra užrašoma tokiu pavidalu:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{arba} \quad y\big|_{x=x_0} = y_0 \qquad (1.9)$$

Pirmos eilės DL **bendruoju sprendiniu** yra vadinama funkcija $y = \varphi(x; c)$, į kurios išraišką įeina laisva konstanta c, tenkinanti šias sąlygas:

1. Funkcija $\varphi(x; c)$ yra DL sprendinys su bet kuriuo fiksuotu c.

2. Kokia bebūtų pradinė sąlyga (1.9), galima rasti tokią konstantos c reikšmę $c=c_0$, kad funkcija $y=\varphi(x;c_0)$ tenkintų duotąją pradinę sąlygą.

Pirmos eilės DL **atskiruoju sprendiniu** vadinama bet kuri funkcija $y=\varphi(x;c_0)$, gauta iš bendrojo sprendinio $y=\varphi(x;c)$ esant konkrečiai konstantos reikšmei $c=c_0$.

Jeigu DL bendrasis sprendinys rastas neišreikštiniame pavidale, t.y., kaip lygtis $\Phi(x;y;c)=0$, tai toks sprendinys yra vadinamas DL **bendruoju integralu**. Lygtis $\Phi(x;y;c_0)=0$ tokiu atveju vadinama DL **atskiruoju integralu**.

Geometriškai bendrasis sprendinys $y=\varphi(x;c)$ yra integralinių kreivių šeima plokštumoje Oxy, atskirasis sprendinys $y=\varphi(x;c_0)$ - viena šios šeimos kreivė, einanti per tašką (x_0,y_0).

(1.7) lygties sprendinio, tenkinančio pradinę sąlygą (1.9), radimo uždavinys yra vadinamas **pradiniu uždaviniu** arba **Koši uždaviniu**.

Teorema 1.1. (Koši uždavinio sprendinio egzistavimo ir vienaties teorema). Jeigu lygtyje (1.7) funkcija f(x,y) ir jos dalinė išvestinė $f'_y(x,y)$ tolydžios tam tikroje srityje Ω, kuriai priklauso taškas (x_0,y_0), tai egzistuoja vienintelis šios lygties sprendinys $y=\varphi(x)$, tenkinantis pradinę sąlygą (1.9).

(Be įrodymo)

šios teoremos geometrinė prasmė yra ta, kad esant išpildytoms jos sąlygoms egzistuoja vienintelė DL integralinė kreivė, einanti per tašką (x_0,y_0).