Paprasčiausi matematiniai modeliai ir pagrindinės matematinio modeliavimo sąvokos

1 tema. Elementarieji matematiniai modeliai

Nagrinėsime kai kuriuos matematinių modelių konstravimo būdus, iliustruojančius fundamentaliųjų gamtos dėsnių, variacinių principų, analogijų ir hierarchinių grandinėlių taikymą. Nežiūrint paprastumo, pateikiama medžiaga sudarys galimybę aptarti tokias sąvokas, kaip modelių adekvatumas, jų “aprūpinimas”, netiesiškumas, skaitinė realizacija ir eilę kitų principinių matematinio modeliavimo klausimų.

1. *Fundamentalieji gamtos dėsniai.* Labiausiai paplitęs modelių konstravimo metodas yra fundamentaliųjų gamtos dėsnių taikymas konkrečioje situacijoje. Tie dėsniai yra visuotinai pripažinti, daugybę kartų patvirtinti praktikoje, jie yra daugelio mokslo ir technikos laimėjimų pagrindas. Todėl jų pagrįstumas nekelia abejonių, o tai, be viso kito, garantuoja tyrinėtojui galingą psichologinę paramą. Taikant šį metodą yra svarbu suprasti, kokį dėsnį (dėsnius) pritaikyti duotuoju atveju ir kaip tai padaryti.

a) *Energijos tvermės dėsnis.*

Šis dėsnis yra žinomas jau maždaug du šimtus metų ir užima, galima sakyti, garbingiausią vietą didžiųjų gamtos dėsnių tarpe.

Jį taikydamas, batistikos ekspertas gali nesunkiai apytikriai įvertinti revolverio kulkos greitį net ir nesinaudodamas specialia laboratorija. Tuo tikslu galima pasinaudoti nesudėtingu švytuoklės tipo prietaisu – ant lengvo, standaus ir laisvai besisukiojančio strypo pakabintu svarmeniu (1 pav.)

Kulka, įstrigusi svarmenyje, perduos sistemai “kulka – svarmuo” savo kinetinę energiją, kuri strypo didžiausio atsilenkimo nuo pusiausvyros padėties momentu visiškai pereis į sistemos potencinę energiją. Tie perėjimai matematiškai užrašomi lygybių grandinėle:

$$\frac{mv^2}{2} = (M + m)\frac{V^2}{2} = (M + m)gl(1 - \cos\alpha)$$

Čia – kulkos, turiničios masę ir greitį , kinetinė energija, - svarmens masė, - sistemos “svarmuo – kulka” greitis iškart po susidūrimo, - laisvo kritimo pagreitis, - strypo ilgis, - didžiausio nuokrypio kampas. Ieškomas greitis išreiškiamas formule

(1) $$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}}$$

kuri bus gana tiksli, jeigu į modelį neįtraukti energijos nuostoliai (oro pasipriešinimas, svarmens ir kulkos įšilimas ir kt.) yra nedideli.

Tačiau bet kuriuo atveju negalima tvirtinti, kad ankščiau užrašyta lygybių grandinėlė yra tiksli, kadangi yra teisingas <u>*pilnosios energijos*</u> tvermės dėsnis, o ne mechaninės energijos tvermės dėsnis. Tuo būdu, (1) formulė yra išreiškiamas ne tikrasis kulkos greitis, o tam tikras jo apatinis įvertis:

$$v \le v_{tikrasis}.$$

Panašius samprotavimus gali taikyti ir inžinierius, norėdamas įvertinti laiką T, per kurį galingumo W lazerio spinduliu galima pragręžti skylę L storio metalo lakšte. Laikysime, kad lazerio spindulys krenta statmenai į lakšto plokštumą (2 pav.)

2 pav. Pradinė, tarpinė ir galutinė metalo gręžimo lazeriu stadijos.

Jeigu lazerio energija pilnai sunaudojama metalo stulpelio, kurio masė yra lygi $LS\varrho$ (S – apšvitinamas plotas, LS – stulpelio tūris, ϱ - medžiagos tankis) išgarinimui, tai energijos tvermės dėsnis yra išreiškiamas lygybe

(2) $E_{\circ} = WT = hLS\varrho$

kur h – energija, reikalinga masės vieneto išgarinimui.

Dydis h yra sudėtinis ir gali buti išreikštas taip:

$$h = (\emptyset_{tirp} - \emptyset)h_1 + h_2 + h_3,$$

Kadangi metalą reikia įkaitinti iki tirpimo (lydimosi) temperatūros $\emptyset_{tirp}$, o po to išlydyti ir paversti garu. Čia $\emptyset$ – pradinė temperatūra, h_1 – specifinė šiluminė talpa, $h_2 h_3$ – atitinkamai lydymosi ir garavimo specifinė šiluma.

Skylės gylio $l(t)$ priklausomybę nuo laiko galima nustatyti iš detalaus energijos balanso laiko intervale $[t, t + dt]$. Per tą laiką išgarintai masei

$$[l(t + dt) - l(t)]S\varrho = dlS\varrho$$

išeikvojama energija $dlhS\varrho$, lygi lazerio išspinduliuotai energijai:

$$dlhS\varrho = Wdt,$$

iš kur gauname diferencialinę lygtį

$$\frac{dl}{dt} = \frac{W}{hS\varrho}$$

Kadangi $l(0) = 0$ (pradinė sąlyga diferencialinei lygčiai), tai turėsime

(3) $$l(t) = \frac{W}{hS\varrho}t = \frac{E(t)}{hS\varrho}$$

kur $E(t)$ – visa energija, lazerio išspinduliuota iki laiko momento t. Taigi, skylės gylis proporcingas sunaudotai energijai.

Iš tikrųjų gręžimo procesas yra žymiai sudėtingesnis už čia panaudotą schemą: energija yra naudojama medžiagos kaitinimui, garų pašaliimui iš duobutės, kuri gali turėti netaisyklingą formą ir t.t.

Tiek pavyzdyje su kulka, tiek pastarąjame pavyzdyje akivaizdžios paklaidos dėl padarytų supaprastinančių prielaidų. Tiriamo objekto ir modelio atitikimo klausimas – vienas pagrindinių matematiniame modeliavime.

b) *Medžiagos tvermės dėsnis*

Tegul nedidelis kiekis radioaktyvios medžiagos patalpintos uždarame storasieniame inde, kurio sienos yra pagamintos iš nepralaidžios radiacijai medžiagos, sakykime, švino. (3 pav.) Tokia situacija yra tipiška naudojant radioaktyvias medžiagas energetikoje bei jas saugant. Žodis “ nedidelis” šiuo atveju reiškia tą supaprastinančią prielaidą, kad visi skilimo produktai nesusidurdami su medžiagos atomais palieka 1-ąją sritį.

Kitaip tariant, radioaktyvių medžiagų laisvo kelio ilgis 1-oje srityje yra žymiai didesnis už srities charakteringus išmatavimus. Tarsime, kad 2-oje srityje yra priešinga situacija, t.y., kad $\lambda_2 << L_2$, tuo būdu čia išaiškėja sąvokos “storasienis indas” prąsmė.

Tokiu būdu, viskas, kas išlekia iš 1-sios srities, yra sugeriama 2-je srityje, o suminė abiejų medžiagų masė nesikeičia. Tai ir yra medžiagos tvermės dėsnis, pritaikytas šitoje situacijoje. Jeigu laiko momentu $t = 0$ medžiagų masės buvo lygios $M_1(0)$ ir $M_2(0)$, tai bet kuriuo laiko momentu yra teisingas balansas

(4) $M_1(0) + M_2(0) = M_1(t) + M_2(t)$

Vienos (4) lygties neužtenka, dviejų dydžių $M_1(t)$ ir $M_2(t)$ radimui. Matematinės formuluotės uždarymui reikalingi papildomi faktai apie radioktyvaus skilimo pobųdį. Čia pagrindinį vaidmenį vaidina dėsnis, kuris sako, kad radioaktyvaus skilimo greitis (atomų, skylančių per laiko vienetą, skaičius) yra proprcingas bendram radioaktyviosios medžiagos atomų skaičiui. Per nedidelį laiko tarpą dt tarp momentų t ir $t + dt$ iš viso skilę

$$N_1(t + dt) - N_1(t) = -\alpha_1 N_1(t + \xi dt)dt, \alpha > 0, 0 < \xi < 1$$

atomų. Čia antrą kartą panaudotas medžiagos tvermės dėsnis, tačiau pritaikytas ne visam procesui, o laiko intervalui dt. Šioje lygtyje, aprašančioje atomų balansą, dešinėje pusėje yra ženklas “$-$”, kadangi medžiagos kiekis mažėja, o dydis $N_1(t + \xi dt)$ atitinka tam tikrą vidutinį atomų skaičių duotąjam laiko intervale dt. Perrašysime aptartą dėsnį diferencialiniame pavidale

(5) $\frac{dN_1(t)}{dt} = -\alpha N_1(t)$

Pasinaudoję tuo, kad $M_1(t) = M_1 N_1(t)$, kur μ_1 – pirmosios medžiagos atominis svoris, gausime $\frac{dM_1(t)}{dt} = -\alpha M_1(t)$

Esant savaiminiam radioaktyvumui bet kuris atomas turi tam tikrą nepriklausančią nuo aplinkos būsenos skilimo tikimybę. Todėl kuo daugiau (mažiau) radioaktyvios medžiagos , tuo daugiau (mažiau) išsiskiria skilimo produktų per laiko vienetą. Proporcingumo koeficientas (skilimo konstanta) priklauso nuo konkrečios medžiagos.

Lygtys (4), (5) kartu su sąlygomis $\lambda_1 >> L_1$, $\lambda_2 << L_2$ ir dydžiais α, $M_1(0)$, $M_2(0)$ sudaro tiriamo reiškinio matematinį modelį.

Integruodami (5), gauname, kad skylančios medžiagos kiekis mažėja pagal eksponentinį dėsnį

$$M_1(t) = M_1(0)e^{-\alpha t}$$

ir, kai $t \to \infty$, 1-oje srityje medžiagos visiškai nebelieka.

Kadangi suminė masė dėl (4) lieka pastovi, tai 2-oje srityje medžiagos kiekis auga:

$$M_2(t) = M_2(0) + M_1(0) - M_1(0)e^{-\alpha t} = M_2(0) + M_1(0)(1 - e^{-\alpha t})$$

Taigi, kai $t \to \infty$, skilimo produktai visiškai pereina iš 1-os srities į 2-ą.

c) *Impulso tvermės dėsnis.* Plūduriuojanti, nejudanti ežero paviršiuje valtis net ir nesant vėjui pradės judėti į priekį, jeigu paeiti kelis žingsnius nuo valties smaigalio iki laivugalio. Tuo pasireiškia impulso tvermės dėsnis, tvirtinantis, kad sistemoje, neveikiamoje išorinių jėgų, pilnasis impulsas lieka pastovus. Į irkluotojo judesius valtis reaguoja judesiu į priešingą pusę.

Reaktyvinio judėjimo principas yra pagrindu įvairių įžymių techninių įrenginių, pavyzdžiui, raketos, iškeliančios į Žemės orbitą palygovą. Tam reikia pasiekti greitį, lygų maždaug $8\,\frac{km}{s}$. Paprasčiausias raketos judėjimo matematinis modelis yra gaunamas iš impulso tvermės dėsnio, jeigu neįskaitysime tokių jėgų, kaip oro pasipriešinimas ar gravitacija, bet įskaitysime, aišku, reaktyvinių variklių traukos jėgą.

Tegul raketinio kuro degimo produktai išlekia iš raketos dugne esančių angų greičiu (šiuolaikinėms kuro rušims $u = 3 \div 5\,\frac{km}{s}$). Per mažą laiko tarpą dt tarp laiko momentų t ir dt dalis kuro išdega ir raketos masė pasikeičia dydžiu . Keičiasi taip pat raketos impulsas, tačiau suminis sistemos “raketa plius degimo produktai lieka tokiu pat, kaip ir laiko momentu t, t.y.

$$m(t) \cdot v(t) = m(t + dt)v(t + dt) - dm[v(t + \xi dt) - u],$$

kur $v(t)$ – raketos greitis, $v(t + \xi dt) - u \quad (0 < \xi < 1)$ – vidutinis per laiko intervalą dt išlekiančių iš angų dujų greitis (abu greičiai imami Žemės atžvilgiu). Pirmasis dėmuo dešinėje šios lygybės pusėje – raketos impulsas laiko momentu $t + dt$, antrasis – impulsas, perduotas išlekiančioms dujoms per laiką dt.