Energijos tvermės dėsnis. Jo taikymas šilumos laidumo lygties išvedimui

1. Fizikinės prielaidos apie šilumos perdavimo procesą

Šiluminė energija arba šiluma – tai mežiagos atomų ar molekulių chaotiško judėjimo energija. Šilumos mainai tarp atskirų medžiagos dalių yra vadinami *šilumos laidumu*, o medžiagos, kuriose šilumos laidumo procesas pakankamai intensyvus vadinamos *laidžiomis šilumai medžiagomis*. Tokios medžiagos – tai, pavyzdžiui, metalai, kuriuose šiluminė energija perneša daugiausiai laisvieji elektronai, kai kurios dujos ir t.t. Šilumos laidumo peocesai nagrinėjami esant taip vadinamai *lokaliajai termodinaminei pusiausvyrai* (LTP). Dujoms LTP sąlygos galioja, kai medžiagos dalelių vidutinis laisvojo kelio ilgis žymiai mažesnis negu nagrinėjamo objekto charakteringasis matmuo L ($\lambda << L$). Tokiu atveju dujas galima nagrinėti kaip tolydžią terpę. LTP taip pat reiškia, kad procesai nagrinėjami laike, kuris yra žymiai didesnis negu vidutinis laikas tarp dalelių susidūrimų. Tada srityse, kurių matmenys didesni negu λ, bet žymiai mažesni negu L, susidaro pusiausvyra ir jose galima įvesti tankio, dalelių šiluminio judėjimo greičio ir panašius vidutinius dydžius. Šie lokalieji dydžiai (jie gali būti skirtingi) skirtingose objekto vietose gali būti randami iš pusiausvyrinio Maksvelo dalelių pasiskirstymo. Toks lokalusis dydis yra ir temperatūra T, kurios pagalba apibrėžiama dalelių vidutinė kinetinė energija:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT$$

čia m – dalelės masė, v – vidutinis chaotiško judėjimo greitis, k – Bolcmano konstanta.

Medžiagos vidinė energija (atsirandanti dėl chaotiško dalelių judėjimo apibrėžiama per temperatūrą, naudojant *santykinės šiluminės talpos* sąvoką, t.y.,

$$c(\varrho, T) = \frac{\partial \varepsilon(\varrho, T)}{\partial T}, \qquad c(\varrho, T) > 0$$

čia $\varrho = mn$ – medžiagos tankis (dalelių kiekis vienetiniame tūryje), $\varepsilon(\varrho, T)$ - masės vieneto vidinė energija. Kitais žodžiais tariant – šiluminė talpa – tai energija, kurią reikia perduoti masės vienetui, kad jo emperatūrą pakelti vienu laipsniu.

Paprasčiausia šiluminės talpos išraiška gaunama tada, kai turime *idealiąsias dujas* (dujas, kuriose dalelės sąveikauja tik betarpiškai susidurdamos, panašiai kaip biliardo rutuliukai ir susidūrimų metu nepraranda suminės kinetinės energijos. Jeigu tam tikrame idealiųjų dujų tūryje yra N dalelių, tai jų pilnoji vidinė energija lygi

$$E = N\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}M \cdot \frac{k}{m} \cdot T$$

kur $M = Nm$ – bendra dalelių masė.

Tokiu atveju santykinė vidinė energija ε (energija masės vienetui) reiškiama formule

$$\varepsilon = \frac{E}{M} = \frac{3}{2}\frac{k}{m}T$$

Todėl idealiųjų dujų atveju šiluminė talpa

$$c(\varrho, T) = \frac{\partial \varepsilon(\varrho, T)}{\partial T} = \frac{\partial \left(\frac{3}{2}\frac{k}{m}T\right)}{\partial T} = \frac{3k}{2m}$$

taigi, c nepriklauso nuo ϱ ir T.

Bendru atveju medžiagos šiluminė talpa priklauso ir nuo ϱ ir nuo T .

<u>Furjė dėsnio išvedimas.</u> Tam, kad išvesti šilumos laidumo lygtį, apibrėšime svarbią *šilumos srauto* sąvoką.

Šilumos srautu (ar šiluminės energijos srautu) taške vadinamas šilumos kiekis, pernešamas per laiko vienetą per vienetinį paviršių. Akivaizdu, kad šilumos atveju ji priklauso nuo paviršiaus orientacijos.

Išskirsime medžiagoje (terpėje) tašką (x, y, z) ir paskaičiuosime šilumos srauto W komponentes koordinatės ašių atžvilgiu (Wx, Wy, Wz komponentes). Tuo tikslu vienetinio ploto plokštelę patalpinsime statmenai x ašiai

Dalelės, judančios ašies kryptimi, kerta tą įsivaizduojamą plokštelę iš kairės į dešinę ir iš dešinės į kairę su vienoda tikimybe. Tačiau jeigu dalelių temperatūra abejose plokštelės pusėse yra skirtinga (taigi ir jų kinetinė energija skirtinga), tai per laiko vienetą iš kairės ir iš dešinės yra pernešamos skirtingos energijos. Šių energijų skirtumas ir sudaro šilumos srautą išilgai ašies.

Piešinyje išskirsime sritis, esančias per $\lambda = vT$ į kairę ir į dešinę nuo plokštelės. Iš

$\frac{\cdot}{6}$

dalelių, esančių dešinėje pusėje maždaug juda į kairę (viena iš 6 įmanomų krypčių, o visos kryptys vienodai tikėtinos). Per laiką T ši dalelių dalis kirs plokštelę ir perneš energiją, kuri lygi

(n – dalelių skaičius tūrio vienete)

Analogiškai, dalelės iš kairės pusės perneš energiją kur v_s – dalelių, esančių į kairę nuo plokštelės, greitis. Šių energijų skirtumas, padalintas iš laiko T yra dydis

$$Wx = \frac{1}{6}nv\left(\frac{mv_s^2}{2} - \frac{mv_r^2}{2}\right) = \frac{mnv}{6}(\varepsilon_s - \varepsilon_r) \quad v = \frac{v_s + v_r}{2}$$

Pirmąjame artinyje dydžius ε_s ir ε_r galima išreikšti per dydį ε (energiją taške x, t.y., plokštelėje) tokiu būdu:

$$\varepsilon_r = \varepsilon + \lambda\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \varepsilon + \lambda c\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\varepsilon_l = \varepsilon - \lambda\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \varepsilon - \lambda c\frac{\varepsilon T}{\varepsilon x}$$

Turėjome $c = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \Rightarrow \partial\varepsilon = c\partial T \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = c\frac{\partial T}{\partial x}$

Todėl

$$W_x = -\frac{mnv}{6}\left(\varepsilon + \lambda c\frac{\partial T}{\partial x} - \varepsilon + \lambda c\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{mnv}{3}\lambda c\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\varrho c\lambda v}{3}\frac{\partial T}{\partial x} = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \varkappa = \frac{\varrho c\lambda v}{3}$$

Lygiai taip pat galima gauti komponentus

$$W_y = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial y}, \qquad W_z = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}$$

Arba, kitaip,

(1) $W = -\varkappa \; grad \; T$

$\varkappa$ yra vadinamas šilumos laidumo koeficientu. Taigi, Furje dėsnis sako: šilumos srautas proporcingas temperatūros gradientui.

Analogiškas dėsnis galioja ir medžiagos (dujų) difuzijos atveju (Fiko dėsnis):

$$W = -\varkappa \; grad \; C,$$

kur $c = c(x, y, z)$ – medžiagos koncentracija.

Šiluminio balanso lygtis

Pritaikysime energijos tvermės dėsnį šilumos mainų matematiniam aprašymui. Laikysime, kad šiluma perduodama tik šilumos laidumo būdu.

Išskirsime tolydžioje terpėje elementarųjį kubą, kurio kraštinės dx, dy, dz ir apskaičiuosime šilumos kiekio kritimą per laiką dt. Šilumos kiekio pokytis gali atsirasti tik dėl srautų, įeinančių ir išeinančių per kubo sienas, skirtumų. Sakysime, srautai išilgai x ašies sąlygoja vidinės energijos padidėjimą arba sumažėjimą dydžiu

$$[W_x(x,y,z,t) - W_x(x+dx,y,z,t)]dy\,dz\,dt$$

čia $dy\,dz$ – kubo sienos, statmenos x ašiai, plotas.

Panašiai gausime

$$[W_x(x,y,z,t) - W_y(x,y+dy,z,t)]dx\,dz\,dt$$

$$[W_z(x,y,z,t) - W_z(x,y,z+dz,t)]dx\,dy\,dt$$

Suminės energijos pokytis tokiu būdu yra

$$\Delta E = -div\,W\;dx\,dy\,dz\,dt$$

Iš kitos pusės, dydį ΔE galima išreikšti per srities temperatūros pokytį ir šiluminę talpą pagal formulę

$$\Delta E - (T(t+dt) - T(f))c(\varrho, T)\cdot\varrho\;dx\,dy\,dz$$

Čia, kadangi laikoma, kad tūris mažas, temperatūros tankio reikšmės imamos vidurkinės pagal tą tūrį.

Sulygindami pastarasias išraiškas, gausime

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = div(\varkappa\ grand\ T).$$

čia $C = \varrho c$

arba

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$