

8. paskaita. Diferencialinių lygčių taikymai svyravimams nagrinėti.

- 8.1. Modelių pavyzdžiai
- 8.2. Laisvieji svyravimai
- 8.3. Priverstiniai svyravimai (nehomogeninė lygtis)
- 8.4. Rezonansas ir kiti reiškiniai

8.1. Modelių pavyzdžiai

Nagrinėsime 2-osios eilės lygtį su pastoviais koeficientais.

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = f(t) \quad (8.1)$$

Paminėsime kai kuriuos jos taikymus.

8.1. pavyzdys. (iš elektrotechnikos)

Srovės kitimas lempiniame generatoriuje aprašomas tokiu modeliu:

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + [RC - MS_0] \frac{dv}{dt} + v = 0$$

S_0 - lempos charakteristikos statusas, M – indukcijos koeficientas, C – talpa, L – induktyvumas, R – varža, v – srovė.

8.2. pavyzdys (iš mechanikos). Tiesinis osciliatorius mechanikoje aprašomas lygtimi

$$m\ddot{x} = -\eta\dot{x} - kx + f(t)$$

$m\ddot{x}$ - inercijos jėga, $-\eta\dot{x}$ - trinties jėga, $-kx$ - tamprumo jėga, $f(t)$ – išorinė jėga

Sprendžiant praktinius uždavinius (8.1) lygčiai dažnai formuluojamas Koši uždavinys su pradinėmis sąlygomis:

$$x(t_0) = x_0$$

$$\dot{x}(t_0) = v_0$$

(8.1) lygtis yra vadinama **svyravimų** lygtimi.

Be koši uždavinio (8.1) lygčiai gali būti formuluojamas ir **kraštinis** uždavinys. Tokiu atveju papildomos sąlygos, reikalingos vienintelio atskiros sprendinio išskyrimui iš bendrojo yra formuluojamos prie skirtingų nepriklausomo kintamojo reikšmių. Tada gauname, pavyzdžiui tokį uždavinį:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

$$x \in (A, B)$$

$$y(A) = y_A, y(B) = y_B$$

8.2. Laisvieji svyravimai

Laisvuosius svyravimus aprašo homogeninės lygties

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = 0 \quad (8.1a)$$

sprendiniai.

Išnagrinėsime atskirus jų atvejus. Tuo tikslu randame charakteringosios lygties šaknis

$$m\lambda^2 + \eta\lambda + k = 0$$

$$m\lambda^2 + \eta\lambda + k = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-\eta + \sqrt{\eta^2 - 4mk}}{2m}, \quad \lambda_2 = \frac{-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4mk}}{2m}$$

1) Kai $\eta^2 > 4mk$, charakteringosios lygties šaknys λ_1 ir λ_2 yra realiosios ir skirtingos

$$\text{Tada } x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

kur c_1 ir c_2 - laisvos realiosios konstantos.

2) Kai $\eta^2 < 4mk$, tai λ_1 ir λ_2 - kompleksinės jungtinės

$$\lambda_1 = -\gamma + i\omega_1, \quad \lambda_2 = -\gamma - i\omega_1$$

$$\gamma = -\frac{\eta}{2m}, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{4mk - \eta^2}}{2m}$$

Tada lygties (8.1a) bendrasis sprendinys užsirašys

$$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t)$$

kur $e^{-\gamma t} \cos \omega_1 t$ ir $e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t$ yra atitinkamai realioji ir menamoji sprendinio $e^{\lambda_1 t}$ (arba $e^{\lambda_2 t}$) dalis.

3) Kai $\eta^2 = 4mk$, tai charakteringoji lygtis turi vienintelę realiąją šaknį $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Bendrasis sprendinys tada turi pavidalą

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Tegul $m > 0, \eta = 0, k > 0$, t.y. nėra trinties jėgos.

Tada

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$- \omega_0 (c_1 \sin \omega_0 t - c_2 \cos \omega_0 t)$$

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = C$$

$$\begin{aligned} \frac{mk}{m} \frac{(c_1 \sin \omega_0 t - c_2 \cos \omega_0 t)^2}{2} + \frac{k(c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t)^2}{2} = \\ = \frac{kc_1^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t)}{2} + \frac{c_2^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t)}{2} = \frac{k(c_1^2 + c_2^2)}{2} \end{aligned}$$

Tegul $m > 0, \eta > 0, k > 0$, t.y.

Jei $\eta < 4mk$, tai turėsime **periodinį gesimą** su **amplitudiniu daugikliu**

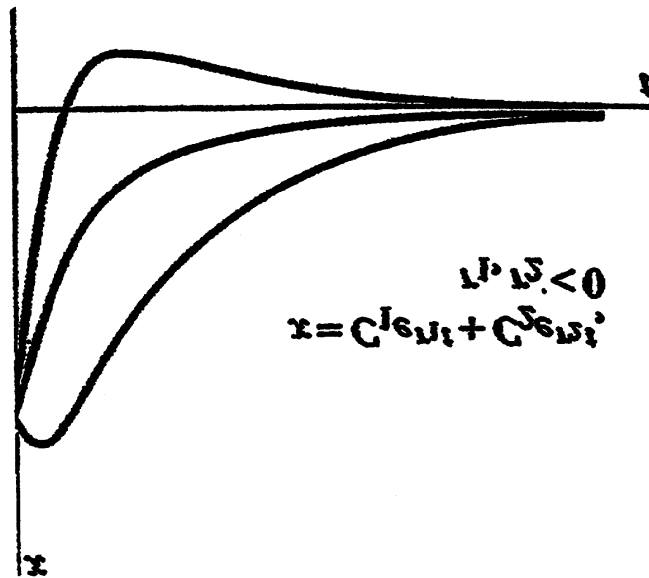
$$x = e^{-\gamma t} \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

Jeigu $\eta \geq 4mk$, tai arba $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ arba $x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$,

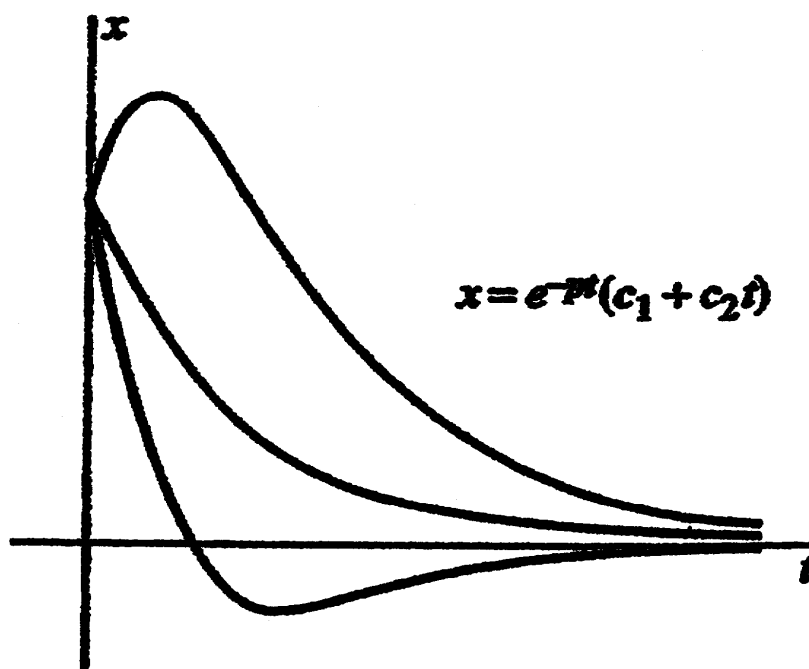
tai turėsime aperiodinį gesimą.

Kai $\eta < 0$ - neigiama trintis, tai turėsime svyravimus su neapibrėžtai augančia amplitude.

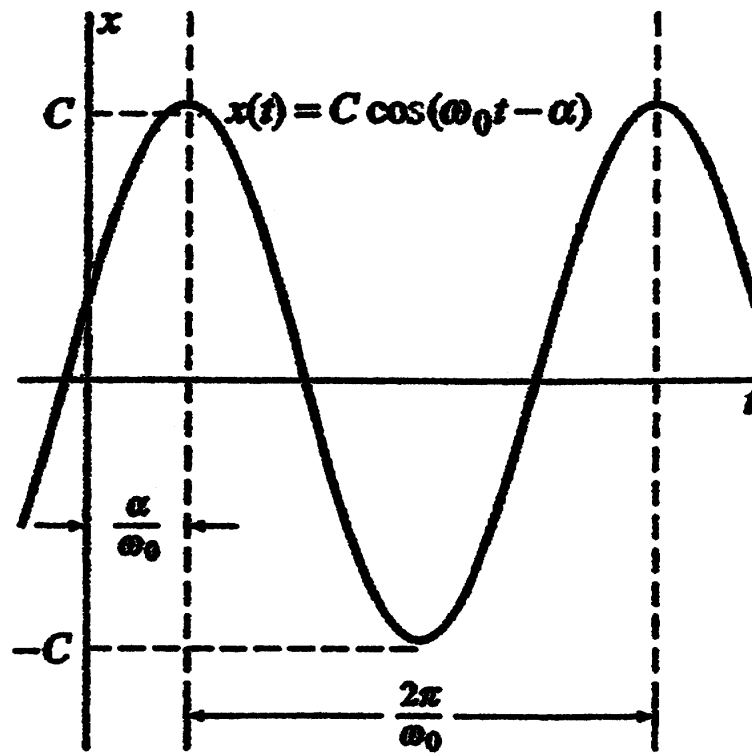
Žemiau pateikiami laisvųjų svyravimų lygties, užrašytos pavidalu $x'' + 2p x' + \omega_0^2 x = 0$ sprendiniai ir jų grafikai, esant įvairiems charakteringosios lygties šaknų atvejams.



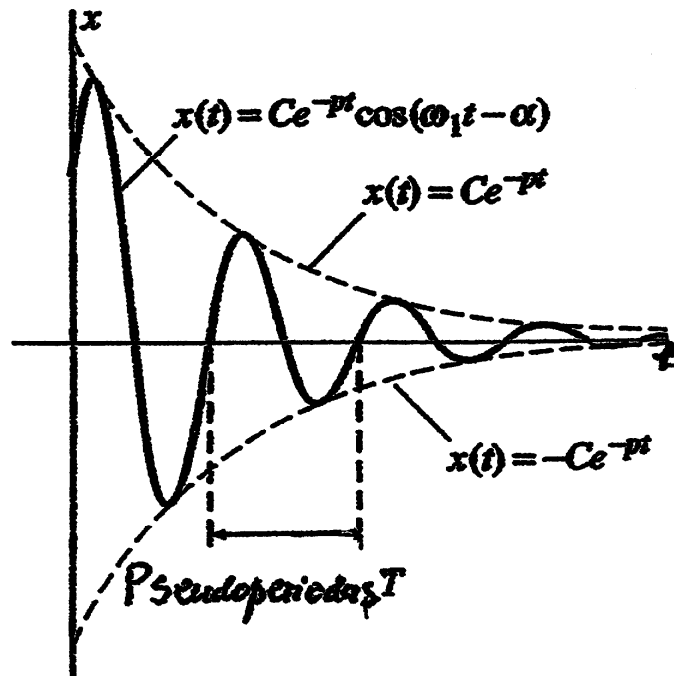
2 pav. Charakteringosios lygties šaknys realios ir skirtingos.



3 pav. Charakteringosios lygties šaknys realios ir lygios (viena kartotinė šaknis).



3 pav. Charakteringosios lygties šaknys grynai menamos. Harmoniniai svyravimai.



4 pav. Charakteringosios lygties šaknys kompleksinės. Gėstamieji svyravimai.

8.3. Priverstiniai svyravimai (nehomogeninė lygtis)

Ištirsime vienintelį atvejį

$$\eta \geq 0, k > 0, \eta^2 < 4mk$$

Tarkime, kad išorinė jėga yra pavidalo $f(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$, kur A, ω, α - tam tikros (fiksotos) konstantos

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (8.2)$$

(8.2) bendrasis sprendinys $x(t)$ yra bendrojo homogeninės lygties sprendinio (laisvieji svyravimai) ir nehomogeninės lygties atskirojo sprendinio (priverstiniai svyravimai), suma t.y.

$$x(t) = \overset{o}{x}(t) + \bar{x}(t)$$

Ieškosime $\bar{x}(t)$ tokiu pavidalu

$$\bar{x}(t) = B \sin(\omega t + \beta),$$

kur B, ω, β - kol kas nežinomi dydžiai.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= B\omega \cos(\omega t + \beta) \\ \ddot{\bar{x}} &= -B\omega^2 \sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} -mB\omega^2 \sin(\omega t + \beta) + \eta B\omega \cos(\omega t + \beta) + kB \sin(\omega t + \beta) &= A \sin(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right.$$

$$B[(k - m\omega^2) \sin(\omega t + \beta) + \eta\omega \cos(\omega t + \beta)] = A \sin(\omega t + \alpha)$$

dauginame ir daliname l. kairiąją pusę iš $\frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}}$

Tada turime

$$\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2} B \left[\frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \beta) + \frac{\eta\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \beta) \right] = A \sin(\omega t + \alpha)$$

Nesunkiai galima įsitikinti, kad

$$\left(\frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}} \right)^2 + \left(\frac{\eta\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}} \right)^2 = 1,$$

Galime įsitikinti, kad

$$\frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}} = \cos(\alpha - \beta), \quad \frac{\eta\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}} = \sin(\alpha - \beta)$$

$$B[\sin(\alpha - \beta) \sin(\omega t + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \cos(\omega t + \beta)] = B \sin(\omega t + \beta + \alpha - \beta) = B \sin(\omega t + \alpha)$$

Taigi,

$$B = \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}}, \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\eta\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}}$$

Iš čia β apibrėžiamas konstantos 2π tikslumu.

Kai $\eta > 0$ ir ω – bet koks, turime, kad $(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2 > 0$, todėl

$$x(t) = B \sin(\omega t + \beta) + e^{-\eta t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t), \quad (8.3)$$

kur B ir β apibrėžti aukščiau,

$$\gamma = \frac{\eta}{2m}, w_1 = \frac{\sqrt{4mk - \eta^2}}{2m}, c_1 \text{ ir } c_2 - \text{ laisvos konstantos}$$

Keičiant konstantas c_1 ir c_2 galima patenkinti bet kurias pradines sąlygas.

(8.3) formulė duoda sprendinį ir tuo atveju, jeigu $\eta = 0$, jeigu tik $k \neq mw^2$, t.y., jeigu išorinės jėgos svyravimų dažnis nesutampa su laisvųjų svyravimų dažniu $w^2 \neq \frac{k}{m} = w_0$

8.4. Rezonansas ir kiti reiškiniai

Tada, kai $w = w_0$ ir $\eta = 0$ ieškosime (8.2) lygties sprendinio pavidalu

$$\bar{x}(t) = Bt \sin(w_0 t + \beta)$$

Išstatome į lygtį

$$m\ddot{x} + kx = A \sin(w_0 t + \alpha), \quad w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\dot{x} = B \sin(w_0 t + \beta) + w_0 B t \cos(w_0 t + \beta)$$

$$\ddot{x} = B w_0 \cos(w_0 t + \beta) + w_0 B \cos(w_0 t + \beta) - B t w_0^2 \sin(w_0 t + \beta)$$

$$m[2B w_0 \cos(w_0 t + \beta) - B t w_0^2 \sin(w_0 t + \beta)] + k B t \sin(w_0 t + \beta) = A \sin(w_0 t + \alpha)$$

$$m\left[2B w_0 \cos(w_0 t + \beta) - B t \frac{k}{m} \sin(w_0 t + \beta)\right] + k B t \sin(w_0 t + \beta) = A \sin(w_0 t + \alpha)$$

$$2m w_0 \cos(w_0 t + \beta) = A \sin(w_0 t + \alpha)$$

$$B = \frac{A}{2m w_0} \quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}, \text{ todėl, kad } \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$$

Tokiu būdu, bendrasis svyravimų uždavinio sprendinys, kai $\eta = 0$, o $w = w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ yra duodamos formule

$$x(t) = \frac{At}{2m w_0} \sin\left(w_0 t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t \quad (8.4)$$

Visais kitais atvejais bendras sprendinys yra duodamas (8.3) formule.

Tegul $\eta = 0$. Jei $w = w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, tai I dėmens svyravimų amplitudė neapribotai auga, didėjant t ir gali tapti kiek norima didelė.

Toks reiškinys yra vadinamas **rezonansu**.

$$\text{Jei } \eta = 0 \text{ ir } |w - w_0| - \text{ mažas sk., tai } B = \frac{A}{m|w_0^2 - w^2|} \rightarrow \infty, \quad w \rightarrow w_0$$

Kai η mažas gali įvykti taip vadinamas **mechaninis rezonansas**

$$\sqrt{2km} > \eta > 0, \text{ tada } B = \frac{A}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + \eta^2 w^2}}$$

$$\text{tai vardiklis mažiausias prie } w = \sqrt{\frac{2km - \eta^2}{2m^2}} \quad w^2 = \frac{2km - \eta^2}{2m^2}$$

Tada amplitudės B maksimumas $M_0(\eta) = \frac{2Am}{\eta\sqrt{4km - \eta^2}} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \infty$ $w \rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Iš tikrųjų, amplitudė

$$B = \frac{A}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + \eta^2 w^2}} \quad \text{pasiekia maksimumą, kai}$$

$$(k - mw^2)^2 + \eta^2 w^2 \rightarrow \min$$

$$\min_m (k - mn)^2 + \eta^2 n$$

$$-2(k - mn)m + \eta^2 = 0$$

$$-2km + 2m^2 n + \eta^2 = 0$$

$$2m^2 n = 2km - \eta^2$$

$$2m^2 w^2 = 2km - \eta^2$$

$$w^2 = \frac{2km - \eta^2}{2m^2} \quad w = \sqrt{\frac{2km - \eta^2}{2m^2}}$$

$$M_0(\eta) = \frac{A}{\sqrt{\left(k - m \cdot \frac{2km - \eta^2}{2m^2}\right)^2 + \eta^2 \frac{2km - \eta^2}{2m^2}}} = \frac{A}{\sqrt{\frac{(2km - 2km + \eta^2)^2 + \eta^2(4km - 2\eta)}{4m^2}}} =$$

$$= \frac{2Am}{\eta\sqrt{4km - \eta^2}}$$

$$M_0(\eta) = \frac{Am}{\eta\sqrt{4km - \eta^2}} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \infty, \quad w = \sqrt{\frac{2km - \eta^2}{2m^2}} \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = w_0, \quad \eta \rightarrow 0$$

Taigi radome lygties

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = A\sin(\omega t + \alpha) \quad (8.2)$$

atskirąjį sprendinį. Jo ieškojome pavidalu

$$\bar{x}(t) = B\sin(\omega t + \beta), \text{ kur}$$

$$B = \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}} \quad \text{ir} \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\eta\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \eta^2 \omega^2}}$$

Jei $\eta > 0$, tai požaknis > 0 prie bet kokių ω todėl bendras (8.2) lygties sprendinys bus

$$x(t) = \bar{x}(t) + \dot{x}(t) = B\sin(\omega t + \beta) + e^{-\gamma t} (c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t), \quad (8.5)$$

$$\text{kur } \gamma = \frac{\eta}{2m}, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{4mk - \eta^2}}{2m}, \quad c_1 \text{ ir } c_2 - \text{laisvos konstantos.}$$

Keičiant konstantas c_1, c_2 galima patenkinti bet kurias pradines sąlygas $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$

Rasime Koši uždavinio sprendinį (8.2) lygčiai, kai priverstiniai svyravimai susidaro veikiant išorinei jėgai. Tegul $\eta = 0$, $w \neq w_0$ (nerezonansinis atvejis). Be to, tegul laiko momentu $t_0 = 0$ materialus taškas yra pusiausvyros padėtyje ir turi nulinių greitį.

Tada pradinės sąlygos $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Tegul $\eta = 0$. Tada

$$B = \frac{A}{m|w_0^2 - w^2|}$$

$$x(t) = \frac{A}{m|w_0^2 - w^2|} \sin(wt + \alpha) + c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t$$

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$$

$$B \sin \alpha + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -B \sin \alpha$$

$$Bw \cos \alpha + c_2 w_0 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{Bw \cos \alpha}{w_0} = B \frac{w}{w_0} \cos \alpha$$

Tada sprendinys užrašomas pavidalu

$$\begin{aligned} x(t) &= B \sin(wt + \alpha) - B \sin \alpha \cos w_0 t + B \frac{w}{w_0} \cos \alpha \sin w_0 t = \\ &= B \left[\sin(wt + \alpha) - \sin \alpha \cos w_0 t - \frac{w}{w_0} \cos \alpha \sin w_0 t \right] = \\ &= B \left[\sin(wt + \alpha) - \sin \alpha \cos w_0 t - \cos \alpha \sin w_0 t - \frac{(w - w_0) \cos \alpha}{w_0} \sin w_0 t \right] = \\ &= B \left[\sin(wt + \alpha) - \sin(w_0 t + \alpha) - \frac{(w - w_0) \cos \alpha}{w_0} \sin w_0 t \right] = \\ &= 2B \sin \frac{w - w_0}{2} t \cos \left(\frac{w + w_0}{2} t + \alpha \right) - B \frac{(w - w_0) \cos \alpha}{w_0} \sin w_0 t \end{aligned}$$

Jeigu $|w - w_0|$ pakankamai mažas, tai I narys duoda harmoninius svyravimus periodo $\frac{4\pi}{w + w_0}$ ir lėtai kintančia amplitude

$$M(t) = 2B \left| \sin \frac{(w - w_0)t}{2} \right| = \frac{2A}{m|w_0^2 - w^2|} \left| \sin \frac{(w - w_0)t}{2} \right|$$

Amplitudė $M(t)$ laikui bėgant kinta nuo 0 iki maksimalios reikšmės $M(t) = \frac{2A}{m|w_0^2 - w^2|}$

periodiškai su periodu $T = \frac{2\pi}{|w_0 - w|}$. Tokie svyravimai vadinami **mušimais**.

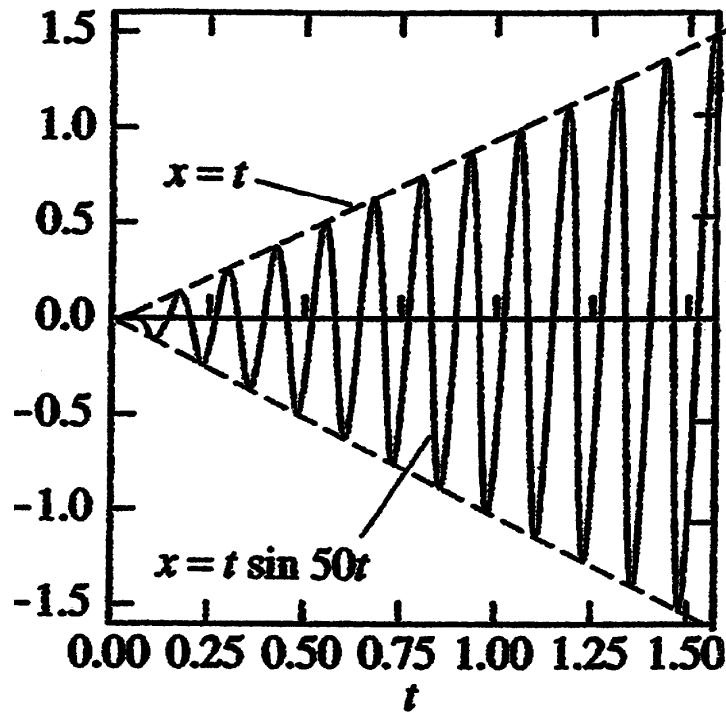
Antroji dedamoji, kai $w \sim w_0$ yra maža, palyginus su mušimų amplitude $B \frac{|w - w_0| \cos \alpha}{w_0}$.

Taigi, antros eilės DL su pastoviais koeficientais

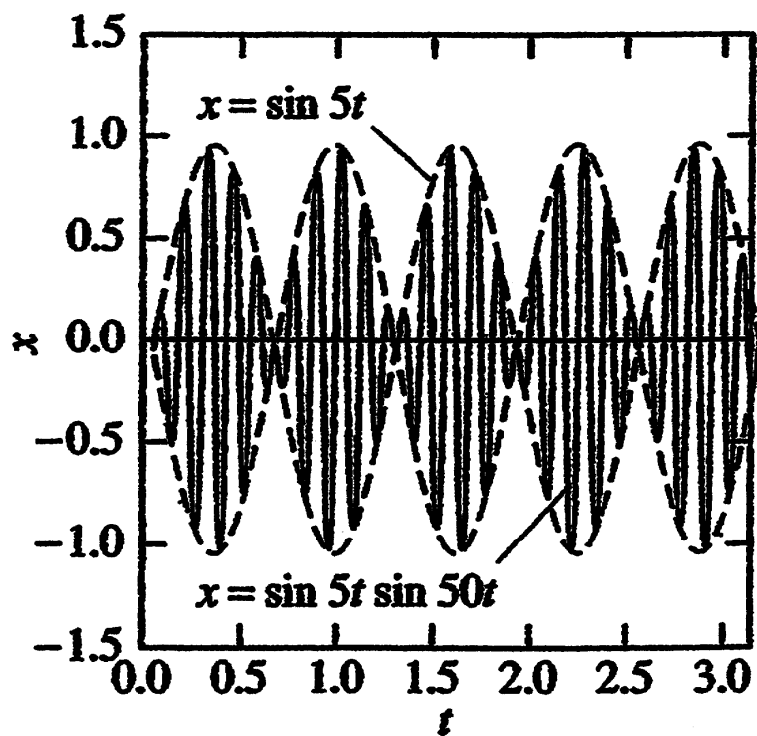
a) turi daug svarbių taikymų,

- b) jos koeficientai ir sprendinio parametrai turi aiškią mechaninę ar kitokią interpretaciją,
- c) ją galima išspręsti analiziškai (gauti sprendinį formulės pavidalu),
- d) keičiant lygties parametrus galima gauti įvairius svyravimų ar kitus režimus stebimus įvairiose realiose situacijose.

Žemiau pateikiami kai kurie lygties $mx'' + cx' + kx = F(t)$, $F(t) = F_0 \cos \omega t$ sprendiniai ir jų grafikai.



6 pav. Rezonanso reiškiny. Lygtis $x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t$, $x(0) = x'(0) = 0$.



7 pav. “Mušimų” reiškiny. Lygtis $x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_1 t$, $x(0) = x'(0) = 0$, $\omega_1 \neq \omega_0$