

Diferencialinės lygtys. Modeliavimas. Pradinis uždavinys.

Pavyzdžiai

Diferencialinės lygtys yra labai svarbios gamtos ir technikos moksluose, kadangi jos yra daugelio fizikos dėsnių bei sąryšių matematinė forma.

Pateiksime keletą paprasčiausių pavyzdžių, iliustruojančių diferencialinių lygčių aparato galimybes, o taip pat tipinius *modeliavimo* etalonus, t.y. nuoseklius žingsnius nuo fizikinės situacijos (fizikinės sistemos) iki matematinės formuluotės (matematinio modelio), jo lygčių sprendimo bei rezultatų fizikinės interpretacijos. Tai, gal būt, būtų lengviausias kelias suprasti pagrindines idėjas apie diferencialinių lygčių prigimtį ir jų taikymus.

1 pvz. Radioaktyvumas, eksponentinis gėsimas.

Eksperimentai rodo, kad radioaktyvioji medžiaga yra greičiau, proporcingu jos masei nagrinėjamoju laiko momentu. Jei turime, tarime, 2 gramus tokios medžiagos tam tikru laiko momentu (tegu tai būna $t = 0$) ką galima pasakyti apie medžiagos kiekį vėlesniais laiko momentais?

Sprendimas. 1 žingsnis. Matematinio modelio (diferencialinės lygties) išvedimas remiantis fizikine situacija.

Pažymėkime $y(t)$ medžiagos kiekį laiko momentu t . Jo kitimo greitis yra $\frac{dy}{dt}$.

Pagal radioaktyvios medžiagos skilimo dėsnį, $\frac{dy}{dt}$ yra proporcingas y .

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = -ky$$

Taigi, $y(t)$ yra nežinoma funkcija, priklausanti nuo t , tenkinanti (1) lygtį. Kitaip tariant, $y(t)$ yra (1) lygties sprendinys. Konstanta k yra tam tikra fizikinė konstanta, kurios skaitinė vertė žinoma įvairioms radioaktyvioms medžiagoms. (Pavyzdžiui, radžio atveju turėsime $k \approx -1.4 \cdot 10^{-11} \frac{1}{s}$)

Kadangi medžiagos kiekis yra teigiamas dydis ir laikui bėgant mažėja, tai $\frac{dy}{dt} < 0$, todėl k irgi turi būti neigiamas. Atkreipkime dėmesį, kad konstantos k fizikinę dimensiją diktuoja tai, kad (1) lygties abiejose pusėse turi būti tos pačios dimensijos dydžiai.

Matome, kad nagrinėjamas fizikinis procesas matematiškai aprašomas pirmos eilės paprastąja diferencialine lygtimi. Kitaip (1) lygtis yra šio fizikinio proceso matematinis modelis.

Visur ten, kur fizikiniuose dėsniuose naudojamas funkcijos kitimo greitis, gauname modelius, aprašomus diferencialinėmis lygtimis.

2 žingsnis. Diferencialinės lygties sprendimas.

Kos kas mes dar nežinome diferencialinių lygčių sprendimo metodų, tačiau šiuo atveju galime pasinaudoti matematinės analizės žiniomis. Iš tikrųjų, (1) lygtis yra teiginys, kad sprendinio $y(t)$ išvestinė yra proporcinga y . Prisiminkime, kad tokią sąlybą turi eksponentinė funkcija e^{kt} arba, bendriau ce^{kt} . Jeigu įstatysime ce^{kt} į lygtį, gausime

$$(ce^{kt})' = cke^{kt} = ky(t)$$

taigi, $y(t) = ce^{kt}$ - (1) lygties bendrasis sprendinys. Čia konstanta c gali įgyti bet kurią reikšmę, todėl lygties bendrasis sprendinys, kaip matysime vėliau, yra, kaip taisyklė, tam tikra funkcijų aibė (šeima).

Tačiau aišku, kad fizikinis procesas vyksta vienareikšmiškai. Kaip mums iš funkcijų šeimos išskirti tą vienintelę jo eigą aprašančią funkciją $y(t)$? Tai mums leidžia padaryti.

3 žingsnis. Atskirojo sprendinio išskyrimas iš bendrojo panaudojant pradinę sąlygą.

Turėjome, kad pradiniu laiko momentu $t = 0$ radioaktyvios medžiagos kiekis yra 2 gramai. Formule tai užrašoma taip:

$$(2) \quad y(0) = 2$$

Tai yra vadinama *pradine sąlyga*. Mes ją pasinaudosime konstantos c užfiksavimui. Turime

$$y(0) = ce^{k \cdot 0} = 2, \text{ taigi, } c = 2$$

Matome, kad ieškomas atskirasis sprendinys šiuo atveju yra

$$(3) \quad y(t) = 2e^{kt}$$

Tai reiškia, kad radioaktyvios medžiagos kiekis laikui bėgant mažėja eksponentiškai ($k < 0$). Tai atitinka fizikinių eksperimentų rezultatus.

4 žingsnis. Patikrinimas.

Iš (3) turime

$$\frac{dy}{dt} = 2ke^{kt} = ky \quad \text{ir} \quad y(0) = 2e^0 = 2.$$

Matome, kad (3) funkcija tenkina (1) lygtį bei pradinę sąlygą (2).

Ši paskutinį žingsnį (patikrinimą) visada reikia stengtis atlikti.

Toliau pateiksime išnagrinėtos (1) lygties vieną svarbų taikymą.

Radioaktyviosios anglies metodas šiuo metu yra vienas pagrindinių datavimo metodų archeologijoje bei paleontologijoje. Jį pasiūlė amerikiečių mokslininkas W.E.

Libby (Nobelio premija chemijos srityje 1960 m.). Šis metodas paremtas tuo, kad atmosferoje bei gyvuosiuose organizmuose radioaktyviosios anglies izotopo ^{14}C ir įprastinės (stabiliosios) anglies ^{12}C koncentracijų santykis yra konstanta. Kai organizmas miršta, radioaktyviosios anglies absorbcija (maitinantis ir kvėpuojant) nutrūksta. Taigi, galima nustatyti pvz., fosilijų (suakmenėjusių gyvūnų liekanų) amžių, palyginant tą santykį fosilijose ir atmosferoje. Yra žinoma, kad ^{14}C skilimo pusperiodis (laikas, per kurį pradinis radioaktyviosios medžiagos kiekis sumažėja 2 kartus) yra 5730 metų.

Pavyzdys. Jei fosilijoje yra 25% pradinio ^{14}C kiekio, tai koks jos amžius?

Sprendimas. Kaip matėme, radioaktyvųjį skilimą aprašo matematinis modelis

$$y' = ky, \quad k < 0, \quad y(0) = y_0$$

jo sprendinys yra $y(t) = y_0 e^{kt}$.

Prisiminę, ką reiškia radioaktyvaus skilimo pusperiodis, iškart gauname

$$(4) \quad y_0 e^{k \cdot 5730} = \frac{1}{2} y_0, \quad e^{5730k} = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{\ln \frac{1}{2}}{5730} = -0.000121$$

Laiką, per kurį radioaktyviosios anglies kiekis sumažėja iki 25%, galima apskaičiuoti taip:

$$(5) \quad y_0 e^{-0.000121t} = \frac{1}{4} y_0, \quad t = \frac{\ln \frac{1}{4}}{-0.000121} = 11460$$

Gavome atsakymą – fosilijos amžius 11460 metų. Ar galime visiškai juo pasitikėti? Deja, kaip ir daugeliu kitų atvejų, šis matematinis modelis yra tik artutinės tikrovės aprašymas, todėl galutinis atsakymas neišvengiamai turi paklaidą. Galima paminėti bent du modelio netikslumo priežastis:

- 1) Eksperimentiškai C^{14} skilimo pusperiodis nustatomas su paklaida (apie 40 metų)
- 2) C^{14} ir C^{12} santykis atmosferoje ilgame laiko intervale iš lėto svyruoja (taigi, it teiginį, kad jis yra konstanta, reikia vertinti atsargiai).

Pasitelkus kitus datavimo metodus, yra nustatyta, kad mūsų nagrinėtasis metodas duoda kiek mažesnių metų skaičių, negu yra iš tikrųjų. Patikimesnis skaičius šiuo atveju būtų 12 000 ar 13 000 metų.

2 pvz. Šilumos mainai. Niutono dėsnis

Varinis rutulys įkaitinamas iki 100°C temperatūros. Po to laiko momentu $t = 0$ jis panardinamas į vandenį, kurio temperatūra pastovi ir lygi 30°C . Po 3 minučių rutulio temperatūra sumažėjo iki 70°C . Per kiek laiko rutulio temperatūra nukirs iki 31°C ?

Fizikinė informacija. Eksperimentai rodo, kad rutulio temperatūros T kitimo greitis proporcingas skirtumui tarp jo temperatūros ir jį supančios aplinkos temperatūros (Niutono dėsnis). Taip pat žinoma, kad varyje šiluma sklinda taip greitai, kad duotuoju laiko momentu temperatūra praktiškai yra vienoda visuose rutulio taškuose.

Sprendimas. 1 žingsnis. Modeliavimas. Užrašykime Niutono dėsnį lygties pavidalu. Pažymėję (nežinomą) proporcingumo konstantą raide k , gauname

$$(6) \quad \frac{dT}{dt} = k(T - 30)$$

2 žingsnis. Bendrasis sprendinys. Atskyrę kintamuosius ir suintegruvę, gauname

$$\frac{dT}{T - 30} = k dt, \ln|T - 30| = kt + C, T(t) = ce^{kt} + 30$$

3 žingsnis. Atskirasis sprendinys. Duotoji pradinė sąlyga $T(0) = 100$ leidžia rasti konkrečią c reikšmę

$$T(0) = ce^0 + 30 = 100 \Rightarrow c = 70 \Rightarrow T(t) = 70e^{kt} + 30$$

4 žingsnis. k nustatymas ir galutinio atsakymo gavimas

Kadangi iš sąlygos turime $T(3) = 70$, tai toliau gauname

$$T(3) = 70e^{k \cdot 3} + 30 = 70 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \ln \frac{70 - 30}{70} = -0.1865$$

Kadangi k neigiamas, tai ir $\frac{dT}{dt}$ bus neigiamas. Taip ir turi būti, kadangi T turi mažėti. Dabar jau galime gauti galutinį uždavinio atsakymą

$$T(t) = 70e^{-0.1865t} + 30 = 31$$

$$-0.1865t = \ln\left(\frac{1}{70}\right)$$

$$t = 22.78$$

Matome, kad varinis rutulys atvės iki 31°C po maždaug 23-jų minučių.

Patikrinimas. Savarankiškai patikrinti, ar gautas atsakymas tenkina visas sufomuluotas sąlygas.

3 puz. Vandens ištekėjimas per skylę (Toričelio dėsnis)

Cilindrinė cisterna, kurios aukštis 1.5 metro o jos pagrindo skritulio skersmuo 1.0 metras, pripildyta vandens. Cisternos dugne yra skritulio formos skylė, jos skersmuo 1 cm, tam tikru laiko momentu ji atidaroma, ir vanduo pradeda ištekėti, veikiamas sunkio jėgos.

Rasti vandens aukštį $h(t)$ bet kuriuo laiko momentu. Rasti laiko momentus, kada cisterna bus 1) pripildyta iki pusės 2) pripildyta 25% 3) tuščia.

Fizikinė informacija. Eksperimentai rodo, kad vandens ištekėjimo per skylę greitis yra

$$(7) \quad v(t) = 0.600\sqrt{2gh(t)} \quad (\text{Toričelio (Torricelli) dėsnis})$$

Čia $g = 980 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ – laisvojo kritimo pagreitis, $h(t)$ – vandens stulpo virš skylės aukštis, t – laikas, koeficientas 0.600 yra taip vadinamas siaurėjimo daugiklis (vandens srovės skersmuo mažesnis už skylės skersmenį).

(7) lygties pavidalą galima paaiškinti taip: $\sqrt{2gh}$ yra greitis, kurį, nesant oro pasipriešinimo, kūnas įgyja krisdamas iš aukščio.

Sprendimas. 1 žingsnis. Modeliavimas.

Matysime, kad mūsų fizikinio uždavinio matematinis modelis vėlgi bus diferencialinė lygtis. Pagrindinė idėja – susieti vandens lygio $h(t)$ kritimą su ištekančio vandens kiekiu. Jei A – skylės plotas, tada per mažą laiko intervalą Δt greičiu v ištekėjusio vandens tūris.

$$\Delta V = Av\Delta t.$$

Dėl to vandens lygis cisternoje h sumažėja dydžiu Δh . Jei pažymėsime cisternos skerspjūvio plotą B , turėsime

$$B\Delta h = -\Delta V = -Av\Delta t$$

(Ženklas “–” čia atsiranda dėl to, kad vandens lygis mažėja).

Padalinę abi lygybės puses iš $B\Delta t$, iš (7) įstatę išraišką, ir pereidami prie ribos, kai $\Delta t \rightarrow 0$, gauname

$$(8) \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{A}{B}v = -26.56\frac{A}{B}\sqrt{h}$$

Iš pateiktų duomenų gauname

$$\frac{A}{B} = \frac{(0.5)^2 \pi}{50^2 \pi} = 0.0001$$

Todėl galutinė modelio lygties išraiška yra

$$(9) \quad \frac{dh}{dt} = -0.002656\sqrt{h}$$

2 žingsnis. Bendrasis sprendinys. Atskyrę kintamuosius ir suintegruvę, gausime

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -0.002656 dt \quad 2\sqrt{h} = -0.002656t + c$$

Pažymėję $c = \frac{c}{2}$, gausime (9) lygties bendrąjį sprendinį

$$(10) \quad h(t) = (c - 0.001328t)^2$$

3 žingsnis. Atskirasis sprendinys. Pradinė sąlyga yra $h(0) = 150 \text{ (cm)}$, todėl

$$h(0) = c^2 = 150 \Rightarrow c = 12.25,$$

ir gauname, kad atskirasis sprendinys turi išraišką

$$(10a) \quad h(t) = (12.25 - 0.001328t)^2$$

4 žingsnis. Uždavinio atsakymą gausime, išsprendę (10a) lygtį atžvilgiu, esant konkrečiai reikšmei.

Resultatus galima surašyti į lentelę

Aukštis h	75.0	37.5	0
Laikas t minutėmis	45	77	154

5 žingsnis. Patikrinimas.

4 pvz. Šuolis su parašiotu

Tarkime, parašiotininkas iššoka iš lėktuvo, ir parašiotas išskleidžiamas tam tikru laiko momentu, tarkime $t = 0$, kada kritimo greitis jau yra $v(0) = v_0 = 10 \frac{m}{s}$. Rasti parašiotininko greitį $v(t)$ bet kuriuo vėlesniu laiko momentu. Ar $v(t)$ neapbrėžtai auga, kai $t \rightarrow \infty$?

Fizikinės prielaidos ir dėsnių. Leiskime, kad žmogus ir įrangos svoris

$W = 712 \text{ nt}$ (niutonų) (taigi, masė $m = \frac{712}{9.8} \approx 72.7 \text{ kg}$), oro pasipriešinimo jėga U proporcinga v^2 , arba $U = bv^2 \text{ nt}$, čia proporcingumo konstanta daugiausia priklauso nuo prašiuo, sakykime, kad $b = 30 \frac{\text{nt}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} = 30.0 \text{ kg}$.

Sprendimas. 1 žingsnis. Modeliavimas. Sudarusime šio uždavinio matematinį modelį (diferencialinę lygtį). Antrasis Niutono dėsnis skelbia, kad

masė pagreitis jėga,

o “jėga” suprasime, kaip visų jėgų veikiančių parašiotininką tam tikru laiko momentu, sumą. Turime dvi tokias jėgas – sunkio jėgą W ir oro pasipriešinimą U .

$$W = mg, \quad g = 9.8 \frac{m}{s^2}, \quad m = \frac{W}{g} = 72.7 \text{ kg},$$

be to U veikia priešingą judėjimui kryptimi, todėl

$$W - U = mg - bv^2$$

Kūno judėjimo pagreitis a yra greičio išvestinė pagal laiką, t.y., $a = \frac{dv}{dt}$. Pagal antrąjį Niutono dėsnį

$$(11) \quad m \frac{dv}{dt} = mg - bv^2$$

Tai ir yra mūsų nagrinėjamos problemos matematinis modelis.

2 žingsnis. Bendrasis sprendinys. Padalinę (11) iš m , gausime

$$(11a) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}(v^2 - k^2), \quad k^2 = \frac{mg}{b}$$

Atskirdami kintamuosius ir integruodami, gausime

$$(12) \quad \int \frac{dv}{v^2 - k^2} = - \int \frac{b}{m} dt = -\frac{b}{m} t + c$$

Kadangi

tai

$$(13) \quad \int \frac{dv}{v^2 - k^2} = \frac{1}{2k} [\ln|v - k| - \ln|v + k|] = \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{v - k}{v + k} \right| = -\frac{b}{m} t + c$$

Daugindami iš ir potencijuodami, gausime

$$(14) \quad \frac{v - k}{v + k} = ce^{-pt}, \quad p = \frac{2kb}{m},$$

čia $c = +e^{2kt}$ ar $-e^{2kt}$, jei trupmena teigiama ar, atitinkamai, neigiama. $c = 0$ taip pat

duoda sprendinį $v = k = \text{const.}$. Spręsdami (14) v atžvilgiu, gauname

$$(15) \quad v(t) = k \frac{1 + ce^{-pt}}{1 - ce^{-pt}}$$

Matome, kad $v(t) \rightarrow k$, tai $t \rightarrow \infty$, todėl laike neauga neapibrėžtai, bet artėja prie ribos, kuri yra lygi k . Įdomu tai, kad ši riba nepriklauso nuo pradinio greičio v_0 .

3 žingsnis. Atskirasis sprendinys. Iš pradinės sąlygos $v(0) = v_0$ ir (14) iškart gauname, kad

$$c = \frac{v_0 - k}{v_0 + k}$$

(15) formulė su šia c reikšme ir duoda atskirąjį šio uždavinio ir kartu mūsų nagrinėjamos problemos sprendimą.

4 žingsnis. Skaičiavimai. Pastebėsime, kad mes dar nepanaudojome konkrečių uždavinio duomenų. Labai dažnai pasiteisina principas: pirmiausiai gauti bendras formules ir po to įstatyti į jas konkrečius skaičius. Einant šiuo keliu lengviau suprasti uždavinio esmę, be to, tai sutaupo darbo, jeigu reikia gauti eilę atskirųjų sprendinių, atitinkančių skirtingiems duomenims. Šiuo atveju apskaičiuosime ribinį greitį

$$k = \sqrt{\frac{mg}{b}} = \sqrt{\frac{W}{b}} = \sqrt{\frac{712}{30.0}} = 4.87 \frac{m}{s}$$

kurį parašiotininkas apytikriai pasieks gana greitai, kadangi eksponentinės funkcijos gęsta greitai. Jei $v_0 = 10 \frac{m}{s}$, tai

$$c = \frac{v_0 - k}{v_0 + k} = 0.345,$$

o konstanta eksponentės rodiklyje (15) formulėje

$$p = \frac{2kb}{m} = \frac{2 \cdot 4.87 \cdot 30}{72.7} = 4.02 \frac{1}{s}$$

Galutinai turėsime

$$(16) \quad v(t) = 4.87 \frac{1 + 0.345e^{-4.02t}}{1 - 0.345e^{-4.02t}}$$

5 žingsnis. Patikrinimas.