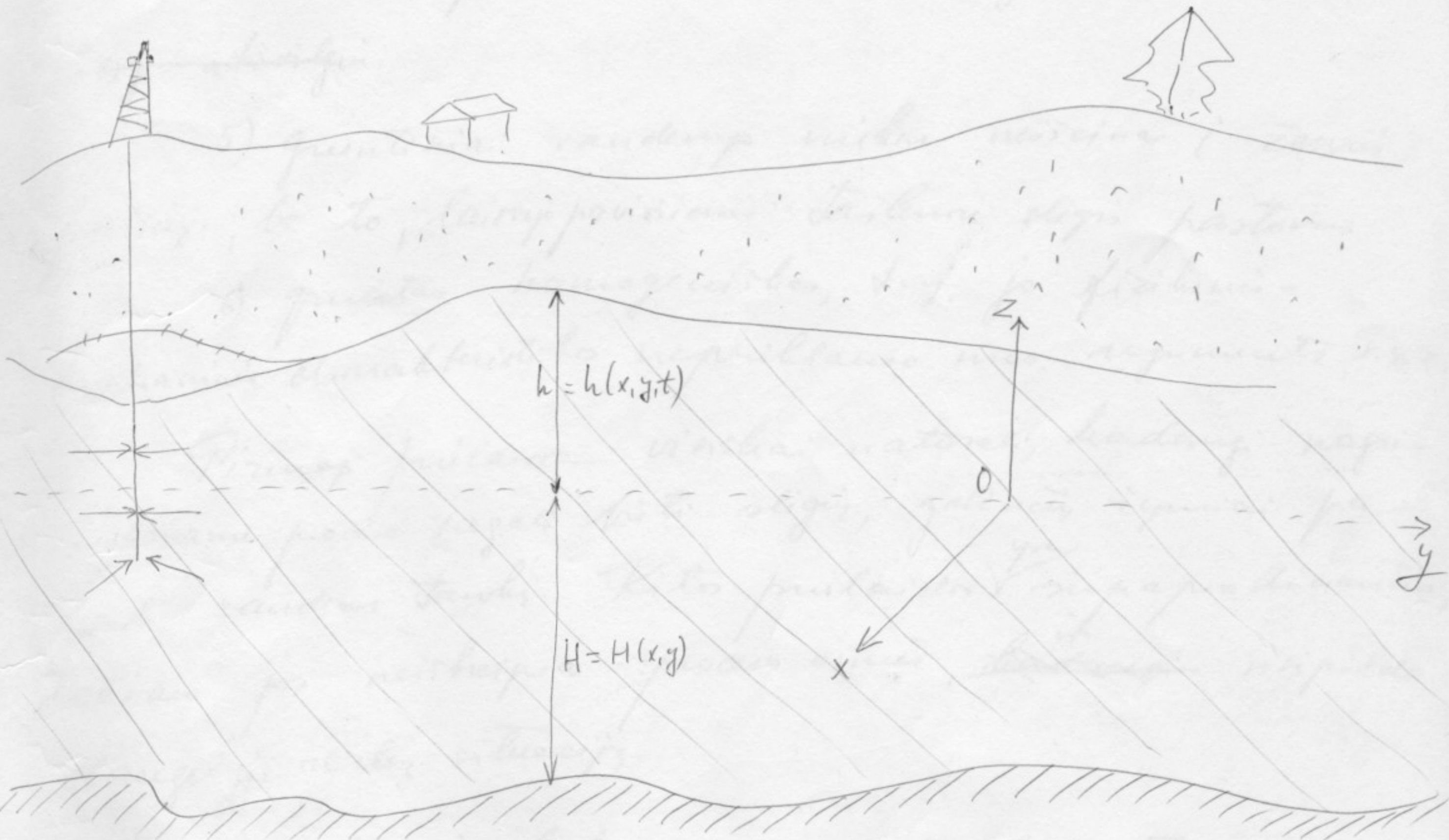
4. Gruntinių vandenų tekėjimo modeliavimas

4.1. Pagrindinės prielaidos. Poringa ~~tai~~ grunto terpė – tai vandeniui laidžios medžiagos (pvz., smėlio, žvyro) sluoksnis, kurį iš apačios riboja vandeniui nelaidus pagrindas (granitas, molis), iš viršaus – žemės paviršiaus reljefas.



Jeigu dėl intensyvaus artezinių gręžinių darbo ar dėl gamtinių reiškinių (liūtys, sausra) vandens lygis tam tikroje sluoksnio vietoje pasikeičia, tai, veikiant sunkio jėgoms, prasideda skysčio judėjimas, išlyginantis laisvąjį paviršių.

8 68412387

Šio proceso aprašymui reikalingos papildomos prielaidos.

1) vanduo – tai nespūdus (pastovaus tankio ρ) skystis. ~~ss~~

2) sluoksnio storis žymiai mažesnis už jo ilgį bei plotį.

3) pagrinde nėra trūkių bei lūžių, jį aprašanti funkcija $H(x,y)$ – pakankamai glodi savo argumentų funkcija.

4) laisvasis paviršius $h = h(x,y,t)$ glodžiai ~~kinta~~ priklauso nuo x,y ~~x,y atžvilgiu~~.

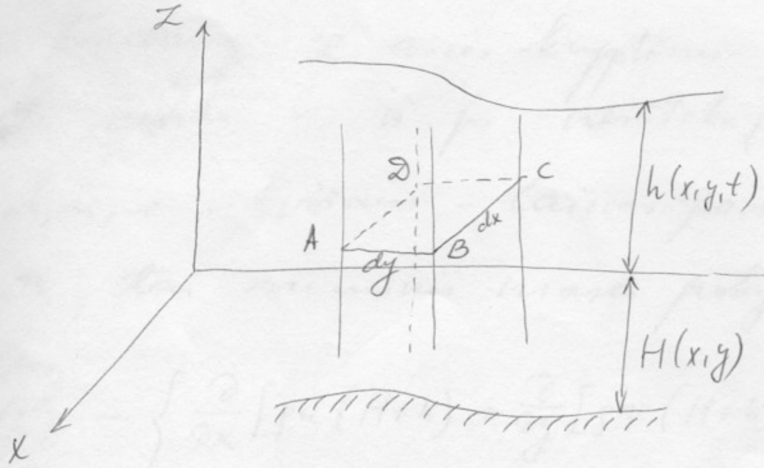
5) gruntiniai vandenys niekur neišeina į žemės paviršių, be to, laisvojo paviršiaus taškuose slėgis pastovus.

6) gruntas homogeniškas, t.y. jo fizikinės-mechaninės charakteristikos nepriklauso nuo argumentų x,y,z.

Pirmoji prielaida visiškai natūrali, kadangi nagrinėjamame procese negali būti slėgių, galinčių žymiai pakeisti vandens tankį. Kitos prielaidos yra supaprastinančios, tačiau jos neiškreipia proceso esmės, ~~kadangi~~ ir išsipildo daugelyje realių situacijų.

4.2. Masės balansas grunto elemente

Išskirkime sluoksnyje elementarųjį tūrį, kuris susidaro vertikaliai prizmei ABCD susikertant su ~~pagrindu ir~~ sluoksnio pagrindu ir laisvuoju paviršiumi. Kadangi prizmės kraštinės dx, dy mažos, o funkcijos H ir h glodžios, tai gautą kūną galime laikyti stačiakampiu gretasieniu. Įveskime dydžius $u(x,y,t)$ ir $v(x,y,t)$ – skysčio greičio komponentes x ir y ašių kryptimis.



Apskaičiuosime skysčio, įtekančio į gretasienį ir ištekančio iš jo per laiką dt kiekį.

Per sieną DC į gretasienio elementą įteka vandens masė, lygi skysčio tūriui, padaugintam iš tankio ρ, t.y. dydis

$$(1) \qquad \rho u(H+h)\,dy\,dt\,,$$

o per sieną AB išteka vandens masė

$$(2) \qquad \rho u(H+h)\,dy\,dt + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u(H+h)\right]dx\right\}dy\,dt$$

Pereidami nuo plokštumos x prie plokštumos $x+\Delta x$ pridedame narį, reiškiantį funkcijos $\rho u(H+h)$ ~~prieaugį~~ pokytį. Dydis $\rho u(H+h)$ reiškia masės (medžiagos) srautą.

Taigi, skysčiui judant x ašies kryptimi, gretasienio elemente susikaupia masė

$$(3) \qquad -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u(H+h)\right]dx\,dy\,dt$$

Analogiškai samprotaudami apie sieneles AD ir BC gauname masės pokytį dėl skysčio judėjimo y ašies kryptimi

$$(4) \qquad -\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v(H+h)\right]dx\,dy\,dt$$

Kadangi z ašies kryptimi į grunto elementą sluoksnio ištekėjimas ir įtekėjimas nėra...

Kadangi z ašies kryptimi į grunto elementą skysčio neįteka ir iš jo neišteka (iš apačios nelaidus sluoksnis, o iš viršaus – laisvas paviršius, per kurį nėra srauto), tai suminis masės pokytis grunto elemente lygus

(5) $-\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]+\frac{\partial}{\partial y}[\rho v(H+h)]\right\}dx\,dy\,dt$

Bendras skysčio, esančio gretasienyje, kiekis yra lygus jo tūriui, padaugintam iš tankio ρ ir iš poringumo koeficiento $m<1$ (kadangi dalį tūrio užima gruntas):

$m\rho(H+h)\,dx\,dy$

Masės pokytis ~~elem~~ grunto elemente per laiką dt, lygus

$\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\rho m(H+h)]dx\,dy\right\}dt$

Kadangi $\frac{\partial H}{\partial t}\equiv 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}\equiv 0$, tai pastarąją išraišką galima užrašyti

(6) $m\rho\frac{\partial h}{\partial t}dx\,dy\,dt$.

Sulygindami (5) ir (6), gauname tolydumo lygtį, išreiškiančią masės tvermės dėsnį nagrinėjamame procese:

(7) $m\rho\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[\rho u(H+h)]-\frac{\partial}{\partial y}[\rho v(H+h)]$

(7) lygtyje nagrinėjamojo dydžio (masės) pokytis laike apsprendžiamas šio dydžio divergencija – tai charakteringa daugeliui modelių, gautų taikant tvermės dėsnius.

Kadangi $\frac{\partial \rho}{\partial x} \equiv 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial y} \equiv 0$, tai (7) lygtį galima perrašyti paprasčiau:

$$(8) \qquad m \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[u\,(H+h)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[v\,(H+h)\right]$$

3. Modelio uždarymas

(8)-ji lygtyje yra trys ~~ne~~ nežinomieji h, u, v. Reiškia, modelio uždarymui reikia papildomų faktų apie proceso pobūdį. Čia mes pasinaudosime plačiai empiriniu Darsi dėsniu

$$(9) \qquad u = -\mu \frac{\partial p}{\partial x} \quad , \; v = -\mu \frac{\partial p}{\partial y} \; ,$$

kur $p(x,y,t)$ – skysčio slėgis, $\mu > 0$ – koeficientas, apsprendžiamas grunto savybėmis. Pagal Darsi dėsnį skysčio tekėjimo greičio komponentės proporcingos atitinkamoms slėgio gradiento komponentėms. Pastebėsime, kad pagal fizikinę prasmę slėgio gradientas – tai jėga, tenkanti tūrio vienetui. Tuo pat metu pagal ~~A~~ antrąjį Niutono dėsnį ~~veik~~ kūną veikianti jėga yra proporcinga jo pagreičiui, o ne greičiui, kaip Darsi dėsnyje. Tačiau šiuo atveju skysčiui tekant (filtruojantis) per gruntą yra ruogalimas grunto dalelių pasipriešinimas, skirtingai nuo laisvo tekėjimo.

(9)-oje formulėje naudojamas dar vienas nežinomas dydis – slysčio slėgis. Jei leisime, kad slysčio judėjimas lėtas ir beveik horizontalus, tai dinaminę slėgio komponentę galima ignoruoti, ir tada hidrostatinis slėgis apskaičiuojamas iš slysčio stulpo slėgio

$$p(x,y,z,t) = \rho g\left(h(x,y,t) - z\right) + \cancel{const}\cdot C$$

kur ~~const~~. C – slėgis slysčio paviršiuje, pvz., atmosferos slėgis, g – laisvo kritimo pagreitis.

Jei pastarąją formulę įstatysime į (9), gausime

$$(10) \qquad u = -\mu\rho g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = -\mu\rho g \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Tada, įstatę (10) išraiškas į tolydumo lygtį (8), gausime galutinę gruntinių vandenų tekėjimo lygties pavidalą:

$$(11) \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(H(x,y)+h\right)\frac{\partial h}{\partial x}\right] + k\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(H(x,y)+h\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right],$$

$$k = \frac{\mu\rho g}{m}$$

Ši lygtis yra vadinama Businesko lygtimi. Joje yra vienintelė nežinoma funkcija $h=h(x,y,t)$.

4. Apie kai kurias Businesko lygties savybes.

(11) lygtis yra nestacionari (ieškoma funkcija priklauso nuo t), dvimatė (h priklauso nuo x ir y), parabolinio tipo. Ji yra nehomogeniška, kadangi $H=H(x,y)$ ir netiesinė, kadangi jos dešiniojoje pusėje yra pavidalo $(h h_x)_x$ ir $(h h_y)_y$ nariai.

Tam, kad užbaigti modelio formuluotę, būtina žinoti (11) lygties ~~pradinius~~ duomenis: pagrindo lygtį $\cancel{H}=H(x,y)$, koeficientą k, pradines ir kraštines sąlygas funkcijai h. Gal būt, galima uždouti h tam tikroje grunto vietoje, pavyzdžiui, prie artezinio gręžinio.

Paprasčiausiam formuluoti: Koši uždavinys

$$h(x,y,t=0)=h_0(x,y)\ ,\quad -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty$$

Koši uždavinyje pagal žinomą pradinį gruntinių vandenų lygį h_0 yra randamas lygis bet kurio laiko momentu $t>0$.

Begalinis sluoksnis yra, aišku, idealizacija, tačiau jeigu mus domina ~~nedidelė~~ sritis sluoksnio centre ~~nedideliame~~ laiko intervale, tai modelį Koši uždavinio formuluotėje yra pakankamai adekvatus.

Pavyzdžiui, kad kai kurios kraštinės sąlygos buvo neišreikštiniu pavidalu įvestos į Businesko lygtį: tada mes panaudojome sluoksnio kraštų nelaidumą.

Jeigu dar pridėsime papildomas prielaidas, modelis supaprastės. Pavyzdžiui, jeigu dėl kurių nors priežasčių sprendinys nepriklauso nuo t (stacionarus procesas), tai prieiname prie elipsinės lygties:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(H+h)\frac{\partial h}{\partial y}\right]=0, \tag{12}$$

kurios sprendimui nereikia žinoti funkcijos h reikšmių pradiniu momentu. Jei sluoksnio pagrindas horizontalus ($H(x,y) \equiv H_0 = \text{const.}$), tai Businesko lygtis tampa homogeniška:

$$\frac{\partial h}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+k\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

Jei padarysime prielaidą apie proceso vienmatiškumą, gausime, pavyzdžiui, lygtį

$$\frac{\partial h}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right) \tag{13}$$

Pastaroji lygtis taip pat vadinama netiesine šilumos laidumo lygtimi. Šis modelis tinka tais atvejais, kai sluoksnis yra ištemptas viena kryptimi.

Galima (11) lygtį daryti sudėtingesnę, pavyzdžiui, įvedant kintamus koeficientus ir t. p.