2. Oro kokybės modeliavimas II.

2.5. Bendroji advekcijos lygtis

Anksčiau darėme prielaidą, kad vėjo ~~[illegible]~~ kryptis sutampa su horizontaliosios x ašies kryptimi. Dabar leisime, kad vėjo kryptis gali būti bet kuri horizontali kryptis. Tai reiškia, kad

$$\vec{u} = (U, V, 0)$$

Tada advekcijos lygtis yra

$$(16) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uc) + \frac{\partial (Vc)}{\partial y} = 0$$

arba

$$(17) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + U\frac{\partial c}{\partial x} + V\frac{\partial c}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial x} + c\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

Imsime (nepriklausančias nuo z) pradines sąlygas

$$(18) \quad c(x, y, 0) = c_0(x, y)$$

1. Uždavinys. Apibendrinti charakteristikų metodą.

Prieštaringų skirtumų schemą (13) galima apibendrinti tokiu būdu:

$$(19) \quad c_{jl}^{n+1} = c_{jl}^{n} - \frac{U\Delta t}{\Delta x}\left(c_{jl}^{n} - c_{j-1\,l}^{n}\right) - \frac{V\Delta t}{\Delta y}\left(c_{jl}^{n} - c_{jl-1}^{n}\right)$$

Panašiai galima apibendrinti (15) lygtį.

Paimsime pradinės koncentracijos R^2

$$c_0(x,y) = \begin{cases} 50\left(1+\cos\frac{\pi R}{4}\right), & \text{jei } R<4 \\ 0, & \text{jei } R>4 \end{cases}$$

kur $R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, $(x_0, y_0) = (5, -10)$

(kosimusinė kalva)

~~Tarkime~~ Tegul vėjo greičio ~~intensy~~ modulis lygus 1, o kryptis priklauso nuo taško (x,y) tokiu būdu:

$$(U, V) = (-\sin\theta, \cos\theta),$$

kur $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

<u>2. Uždavinys.</u> Rasti c profilius, kai $|x| \le 100$, $y \le 100$, $t=3$

2.6. Modelis su difuzija

Pridėsime difuziją prie pernešimo lygties (2.7). Gausime, kaip jau matėme

$$(20) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Uc) = k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (k>0),$$

ir vėl spręsime pradinį uždavinį su pradinėmis sąlygomis

$$(21) \quad c(x,0) = c_0(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

Šiuo atveju charakteristikų metodo negalima ~~pritaikyti~~ panaudoti, tačiau galime toliau taikyti baigtinių skirtumų schemą.

Pasinaudodami Teiloro formule, aproksimuojame taške $(j\Delta x, n\Delta t)$ antrąją išvestinę taip:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \simeq \frac{c((j+1)\Delta x, n\Delta t) - 2c(j\Delta x, n\Delta t) + c((j-1)\Delta x, n\Delta t))}{(\Delta x)^2}$$

Gausime

$$(22) \qquad c_j^{n+1} = c_j^n - \frac{U\Delta t}{\Delta x}\left(c_j^n - c_{j-1}^n\right) + k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(c_{j+1}^n - 2c_j^n + c_{j-1}^n\right)$$

3. Uždavinys. Tegul $k=1$, tegul c_0 ir U tokie pat kaip ankstesniame uždavinyje. Apskaičiuokite maksimalią koncentraciją laiko momentu $t=4$ ir palyginkite su ankstesnio uždavinio rezultatais. Ar difuzija mažina maksimaliąją koncentraciją?

2.7. Neimano stabilumo kriterijus

Yra žinoma, kad skirtuminė schema konverguoja tada, kai ji yra aproksimuojanti ir stabili. Skirtuminės schemos, gautos naudojantis Teiloro skleidiniu, paprastai yra aproksimuojančios. Tačiau ~~stabilumas~~ ir tuo atveju schema nebūtinai yra stabili, ir dažnai tai yra sunku tiesiogiai patikrinti.

Dabar įvesime Neimano stabilumo kriterijų ir pritaikysime jį keliuose pavyzdžiuose: tą savybę yra nesunku patikrinti, kadangi imamas specialus baigtinių skirtumų schemos sprendinio pavidalas.

Šis kriterijus tvirtina, kad baigtinių skirtumų metodas pradiniam uždaviniui diferencialinei lygčiai su pastoviais koeficientais, turinčiam apriežtą sprendinį, yra stabilus, jei bet kuris baigtinių skirtumų sdumos sprendinys, pavidalo

$$C_j^n = \xi^n e^{i\beta j},$$

kur β - realus, $\xi = \xi(\beta)$ - kompleksinis, $i = \sqrt{-1}$

tenkina šią sąlygą: $|\xi| \le 1$. Pastebėsime, kad šiuo atveju ξ^n reiškia ξ, pakeltą n-tuoju laipsniu.

Pritaikysime Noimano kriterijų (22) schemai.

Tegul $C_j^n = \xi^n e^{i\beta j}$, $r = \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$. Tada gauname

$$\xi^{n+1} e^{i\beta j} = \xi^n e^{i\beta j} - Ur\cdot\Delta x\left(\xi^n e^{i\beta j} - \xi^n e^{i\beta(j-1)}\right) + kr\left(\xi^n e^{i\beta(j+1)} - 2\xi^n e^{i\beta j} + \xi^n e^{i\beta(j-1)}\right)$$

Taigi,

$$\xi = 1 - Ur\,\Delta x\left(1 - e^{-i\beta}\right) + k\cdot r\cdot\left(e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}\right) =$$

$$= 1 - U\cdot r\cdot\Delta x\,(1-\cos\beta) - iUr\Delta x\sin\beta + 2kr(\cos\beta - 1) =$$

$$= \left(1 - (2kr + Ur\Delta x)(1-\cos\beta)\right) - iUr\Delta x\sin\beta,$$

todėl

$$|\xi|^2 = 1 - 2\left(2kr + Ur\Delta x\right)(1-\cos\beta) + (2kr + Ur\Delta x)^2(1-\cos\beta)^2 + U^2r^2(\Delta x)^2\sin^2\beta,$$

arba

$$|\xi|^2 - 1 = -2r\,(2k + U\Delta x)(1-\cos\beta) + 4k^2r^2(1-\cos\beta)^2 + 4kUr^2\Delta x\,(1-\cos\beta)^2 +$$

$$+ U^2r^2(\Delta x)^2(1 - 2\cos\beta + 1)$$

Leiskime, kad $(1-\cos\beta)>0$. Tada sąlyga $|\xi|^2\le 1$ yra ekvivalenti

$$-(2k+U\Delta x)+2k^2 r(1-\cos\beta)+2kUr\Delta x(1-\cos\beta)+U^2 r(\Delta x)^2\le 0$$

arba

$$r\left(U^2(\Delta x)^2+(2k^2+2kU\Delta x)(1-\cos\beta)\right)\le 2k+U\Delta x$$

Ši sąlyga, ~~tenkinama~~ patenkinta visiems realiems β, kai $1-\cos\beta>0$, yra ekvivalenti

$$r\left(U^2(\Delta x)^2+4kU\Delta x+4k^2\right)=r(U\Delta x+2k)^2\le 2k+U\Delta x$$

arba

$$(24)\qquad r(2k+U\Delta x)\le 1$$

Šios nelygybės rodo, kad jei yra patenkintas Noimano kriterijus, t. y., jei $|\xi|\le 1$ visiems realiems β $(1-\cos\beta>0)$, tai yra patenkinta (24) nelygybė.

Atvirkščiai, jei patenkinta (24) nelygybė su sąlyga, kad $1-\cos\beta>0$, tai $|\xi|^2\le 1$. Vieninteliu atveju, kai $1-\cos\beta=0$ iš (23) lygybės gauname, kad $|\xi|=1$, tai yra, Noimano kriterijus patenkintas ir šiuo atveju.

Pritaikykime Noimano kriterijų 3 uždaviniui. Paimsime $\Delta x=0.1$, $k=1$, $U=1$. Tada kriterijus patenkintas, kai $\Delta t\le\frac{1}{210}$.

$\Delta t=\frac{1}{211}$ (stabili schema)

$\Delta t=\frac{1}{210}$ (vos-vos stabili)

$\Delta t=\frac{1}{209}$ (nestabili)

2.8. Aproksimacija (suderinamumas), stabilumas ir konvergavimas

Svarbus faktas, liečiantis skirtuminių metodų pradinių uždavinių nagrinėjimą yra tai, kad diferencialinių lygčių su pastoviais koeficientais pakanka imti pradines sąlygas pavidalo

(25) $$c_0(x) = e^{i\varkappa x}, \text{ kur } \varkappa - \text{realus.}$$

Šiuo atveju tikslus sprendinys turi pavidalą

(26) $$c(x,t) = e^{\nu t} e^{i\varkappa x},$$

kur ν - tam tikra kompleksinė konstanta, o skirtuminės schemos sprendinys yra pavidalo

(27) $$c_j^n = \xi^n e^{i\beta j},$$

kur $\beta = \varkappa \Delta x$. (Čia ξ^n yra ξ n-tasis laipsnis).
Pavyzdžiui, jei įstatytume (26) į (20), gausime

$$\nu = -iU\varkappa - k\varkappa^2$$

ir todėl (20) lygties sprendinys, tenkinantis (25) pradinę sąlygą, yra

$$c(x,t) = e^{-(iU\varkappa + \varkappa^2 k)t} e^{i\varkappa x}$$

Tam, kad gauti schemos (22) sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą (25) tinklo taškuose $x = j\Delta x$, įstatome (27) į (22) ir gauname, pažymėję, kaip ir aukščiau, $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$,

$$\xi^{n+1} e^{i\beta j} = \xi^n e^{i\beta j} - Ur\Delta x\left(\xi^n e^{i\beta j} - \xi^n e^{i\beta(j-1)}\right) +$$

$$+ k\left(\xi^n e^{i\beta(j+1)} - 2\xi^n e^{i\beta j} + \xi^n e^{i\beta(j-1)}\right)$$

Tada, kaip ir anksčiau,

$$\xi = 1 - (2kr + Ur\Delta x)(1 - \cos\beta) - iUr\Delta x \sin\beta$$

Bendru atveju, skaičiuojant skirtuminės schemos sprendinį vietoj diferencialinio uždavinio sprendinio taške $(x,t) = (j\Delta x, n\Delta t)$, yra

$$e_j^n = c(j\Delta x, n\Delta t) - c_j^n = e^{v\Delta t n} e^{i\varkappa x} - \xi^n e^{i\varkappa x} =$$

$$= \left((e^{v\Delta t})^n - \xi^n\right) e^{i\varkappa x},$$

Todėl

$$|e_j^n| \le \left|(e^{v\Delta t})^n - \xi^n\right|$$

Kadangi

$$(e^{v\Delta t})^n - \xi^n = \left(e^{v\Delta t} - \xi\right)\left(e^{v\Delta t(n-1)} + e^{v\Delta t(n-2)}\xi + \dots + e^{v\Delta t}\xi^{n-2} + \xi^{n-1}\right),$$

turime

$$\left|(e^{v\Delta t})^n - \xi^n\right| \le C_{v,n} \cdot C_{\xi,n} \left|e^{v\Delta t} - \xi\right| n,$$

kur $$C_{v,n} = \sup_{0 \le l \le n-1} \left|e^{(v\Delta t)l}\right|,$$

$$C_{\xi,n} = \sup_{0 \le l \le n-1} |\xi^l|$$

Kadangi $n = \frac{t}{\Delta t}$, turime

$$|e_j^n| \le C_{v,n} \cdot C_{\xi,n} \cdot t \left|\frac{e^{v\Delta t} - \xi}{\Delta t}\right|$$

Jeigu tikslus sprendinys aprėžtas $\forall t$, tada turime tarėti, kad $C_{v,n}$ yra mažesni už fiksuotą konstantą C_v bet kuriam $n \in N$ (N - teigiami sveikieji sk.). Todėl turime

$$(28) \quad |e_j^n| \le C_v C_{\xi,n} t \left|\frac{e^{v\Delta t} - \xi}{\Delta t}\right|$$

Skirtuminės schemos stabilumo kriterijus patenkintas, jei $C_{\xi,n}$ yra tolygiai aprėžtas atžvilgiu n, t.y., jei

$$|\xi^n| \le C_\xi \quad \forall n \in N,$$

t.y., jei $|\xi| \le 1$, kas yra tiksliai Noimano kriterijus.

Sakome, kad skirtuminė schema yra suderinta, jei Δx ir Δt artėjant į 0, gauname

$$\left|\frac{e^{v\Delta t} - \xi}{\Delta t}\right| \to 0$$

Sakome, kad skirtuminė schema konverguoja, jei kai $\Delta t \to 0$, $|e_j^n|$ irgi artėja į 0. (Kai schema konverguoja, skirtuminės schemos sprendinys konverguoja į tikslųjį sprendinį, kai Δx ir Δt artėja į nulį.)

(28) nelygybė išreiškia ryšį tarp suderinamumo (aproksimacijos), stabilumo ir konvergavimo: ~~Skirtuminė~~ ~~schema tenkinanti~~ Stabili ir aproksimuojanti skirtuminė schema konverguoja.

Įsitikinsime, kad (22) schema yra suderinta (aproksimuojanti). Kadangi

$$e^{v\Delta t} = e^{-(iU\varkappa + k\varkappa^2)\Delta t} = 1-(iU\varkappa+k\varkappa^2)\Delta t + O((\Delta t)^2)$$

ir

$$\xi = 1 - \left(2k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + U\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\left(1-\cos(\varkappa\Delta x)\right) - iU\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin(\varkappa\Delta x) =$$

$$= 1 - \left(2k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}+U\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\frac{\varkappa^2}{2}(\Delta x)^2\left(1+O(\varkappa^2(\Delta x)^2)\right) -$$

$$- iU\frac{\Delta t}{\Delta x}(\varkappa\Delta x)\left(1+O(\varkappa^2(\Delta x)^2)\right) =$$

$$= 1-(iU\varkappa+k\varkappa^2)\Delta t + \Delta t\left(O(\Delta x)\right),$$

todėl gausime

$$\frac{1}{\Delta t}\left(e^{v\Delta t}-\xi\right) = O(\Delta t+\Delta x),$$

taigi, schema yra „pirmos aproksimacijos eilės". Kaip matome, schema yra stabili, kai yra patenkintas Noimano kriterijus

(29) $\quad r\,(2k + U\Delta x) \le 1$

Skirt. Schemos yra sąlygiškai stabilios, besąlygiškai stabilios, priklausomai nuo to, ar stabilumo sąlygoje yra sąryšis tarp Δx ir Δt, ar ne.