Hopfo bifurkacijos

Tarkime, kad autonominė antrosios eilės dinaminė sistema turi stabilųjį ramybės tašką. Kokios yra galimybės keičiant μ šiam taškui prarasti stabilumą? Stabilumo praradimas siejamas su jakobiano matricos tikrinėmis reikšmėmis. Stabiliuosiuose taškuose abiejų t. reikšmių $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, t.y. realiosios t. reikšmių dalys yra neigiamoje pusplokštumėje. Kadangi t. reikšmės yra kvadratinės lygties sprendiniai, tai arba jos abidvi turi būti realiosios ir neigiamos arba jos yra kompleksinės jungtinės su Re dalimi <0.

Todėl svarbu išsiaiškinti, kur patenka $\mathrm{Re}\,\lambda$, kai kinta parametras μ.

Anksčiau aptarti atvejai buvo situacijė, kai realioji t. reikšmė „praeina" tašką $\lambda = 0$. Tai iki šiol tyrinėtos: balno-mazgo, transkritinė ir pitčforko bifurkacijos ($\lambda < 0 \to \lambda > 0$)

Dabar dominės situacijė, kada dvi kompleksinės jungtinės t. reikšmės iš kairiosios pusplokštumės pereina į dešiniąją, t.y. kada $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \to \mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

Superkritinė Hopfo bifurkacija

Fizikiniu požiūriu tokia bifurkacija sutinkama tokiais atvejais, kai dinaminė sistema yra sužadinama ir gesdama juda link ramybės padėties, t.y. gęsta svyravimai, o kai sistema priklauso nuo parametro ir su tam tikromis reikšmėmis pasideda augimas, t.y. parinkus tam tikrą kritinę reikšmę sistema yra išvedama iš stabilios padėties – taškas praranda stabilumą.

Kalbant apie tėkmę fazinėje erdvėje, superkritinė Hopfo bifurkacija stebima tuomet, kai stabilusis židinys pereina į nestabilųjį židinį, o ši kreivė susisuka į mažos amplitudės ribinį ciklą. Hopfo bifurkacijos galima stebėti dinaminėse sistemose, kai $n \geq 2$.

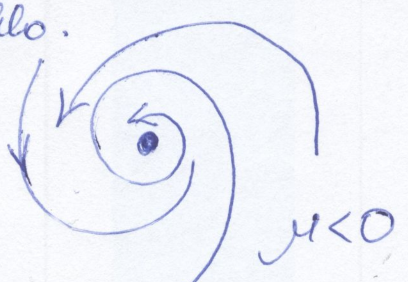
Nagrinėsime šį atvejį, kai $n = 2$.

Kaip tipinę situaciją tirkime pavyzdį:

$$\begin{cases} r' = \mu r - r^3, \\ \theta' = \omega + b r^2. \end{cases}$$

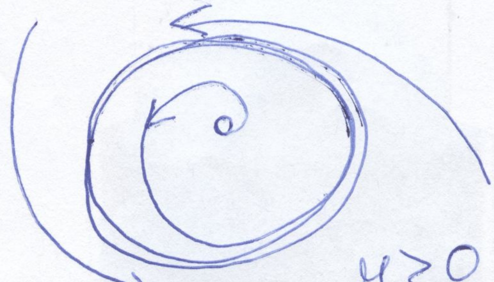
Dinaminė sistema priklauso nuo trijų parametrų: μ, ω, b.
μ atsako už taško $(0,0)$ stabilumą ir jį šakoja.
ω išreiškia mažos amplitudės virpesių dažnį, o b — nustato dažnio sąlygą amplitudei aukštos (didelės) amplitudės osciliacijose.

Kai $\mu<0$, tai $r=0$ yra stabilusis židinys ir kreivės sukimasis priklauso nuo ω ženklo.



$\mu<0$

Kai $\mu=0$, tai $r=0$ išlieka stabilusis židinys.
Kai $\mu>0$, tai $r=0$ yra nestabilusis židinys, o kai $r=\sqrt{\mu}$ — centras — ribinis ciklas.



$\mu>0$

Nagrinėkime tolimes reikšmes! Kad lengviau suvoktume ir tirtume jakobianą sugrįžtame prie (x,y) koordinačių:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$x' = r'\cos\theta + r(-\sin\theta)\cdot\theta'$$

arba (įrašome r' ir θ' išraiškas)

$$x' = (\mu r - r^3)\cos\theta - r\sin\theta(\omega + b r^2);$$

$$x' = (\mu - r^2)\underbrace{r\cos\theta}_{x} - \underbrace{r\sin\theta}_{y}(\omega + b r^2), \text{ o } r^2 = x^2 + y^2.$$

Todėl

$$x' = (\mu - (x^2+y^2))\,x - y(\omega + b(x^2+y^2))$$

$$\underline{x' = \mu x - \omega y + \text{trečiosios eilės nariai}}$$

Analogiškai

$$y' = r' \sin\theta + r\cos\theta \cdot \theta'$$

$$y' = (\mu r - r^3)\sin\theta + r\cos\theta\,(\omega + b r^2)$$

$$\underline{y' = \mu y + \omega x + \text{kubiniai nariai}}$$

Sudarytosios sistemos jakobianas

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mu-\lambda & -\omega \\ \omega & \mu-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 - 4\mu^2 - 4\omega^2}}{2};$$

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega.$$

Kaip suprantame, tikrinės reikšmės „pereina" per menamąją ašį, kai μ keičia ženklą iš „−" į „+".

Bet mums superkritinei Hopfo bifurkacijai būdinga:

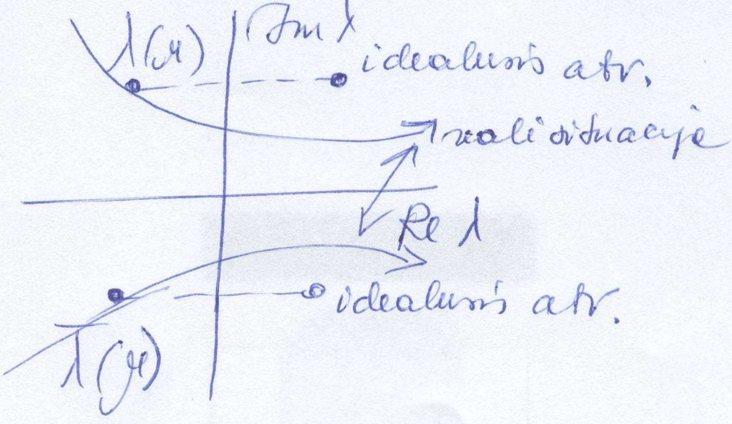
1) $\mu \to \mu_c$ ribinis ciklas tolydžiai didėja nuo 0 proporcingai dydžiui $\sqrt{\mu - \mu_c}$,

2) ribinio ciklo dažnis $\omega = \operatorname{Im}\lambda$ apskaičiuotas, kai $\mu = \mu_c$. Ši formulė tiksli ribinio ciklo atsiradimo taške. Vėliau ji – apytikslė ir koreguojama $O(\mu - \mu_c)$ nariu.

Todėl periodas $T = \dfrac{2\pi}{\operatorname{Im}\lambda} + O(\mu - \mu_c)$.

Skirtingai nei aptartu idealiuoju atveju praktikoje ribinis ciklas yra ne apskritimo, o elipsės formos.

Kitas momentas, kad tikrinės reikšmės iš kairiosios pusplokštumės į dešiniąją pereina ne tiesėmis, o kreivėmis.



Subkritinė Hopfo bifurkacija

Šios situacijos yra labiau pavojingos inžinerinėse taikymuose. Po tokios bifurkacijos trajektorijos gali peršokti į kitą ribinį ciklą, begalybę arba į kitą dimensiją. Tirkime tipinę tokios bifurkacijos situaciją:

$$\begin{cases} r' = \mu r + r^3 - r^5, \\ \theta' = \omega + b r^2. \end{cases}$$

Šiame pavyzdyje r^3 destabilizuojantis narys, verčiantis judėti tolyn nuo pradinio taško.

$$\mu r + r^3 - r^5 = 0$$

$$r(\mu + r^2 - r^4) = 0$$

$r_1^* = 0$, $r^*_{2,3,4,5}$: $r^2 = \dfrac{1 \mp \sqrt{1+4\mu}}{2}$

Kai $\mu < \cancel{0}\ -\frac{1}{4}$, tai tik $r_1^* = 0$

dar du ramybės taškus turėsime, kai $\mu = -\frac{1}{4}$.

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{1+4\mu} > 0 \\ 1 + 4\mu \geq 0 \end{cases}$$

$$\mu \geq -\frac{1}{4}$$

$$\mu < 0$$

Kai $-\frac{1}{4} \leq \mu < 0$, tai bus dar 4 ramybės taškai.

Kadangi $r > 0$ (spindulys), tai tuomet turime tokias situacijas:

I. Kai $-\frac{1}{4}<\mu<0$, tai yra 3 ramybės taškai:

$$r_1^*=0, \quad r_2^*=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1+4\mu}}{2}}, \quad r_3^*=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4\mu}}{2}}.$$

stabilusis, nestabilusis, stabilusis

II. Kai $\mu=-\frac{1}{4}$, tai yra 2 ramybės taškai:

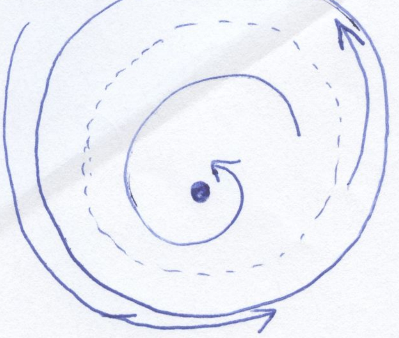
$$r_1^*=0 \text{ ir } r_2^*=\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

III. Kai $\mu\geq 0$, tai yra 2 ramybės taškai:

$$r_1^*=0 \text{ ir } r_2^*=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4\mu}}{2}}$$

nestabilusis, stabilusis

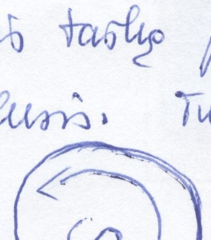
I.



$\mu<0$

Turime du atraktorius: $r=0$ ramybės tašką ir stabilųjį ribinį ciklą. Tarp jų yra nestabilusis ribinis ciklas.

III. Kai $\mu\to 0$, tai nestabilusis ciklas traukiasi ir artėja prie $r=0$ taško. Kai $\mu=0$, tai nestabilusis ciklas susitraukia į $r=0$ ramybės tašką paliesdamas jo stabilumą. Taškas tampa nestabilusis. Turime nestabilųjį ramybės tašką ir stabilųjį ribinį ciklą.



Kai $\mu>0$, tai turime didelės amplitudės ribinį ciklą (stabilųjį). Sprendiniai juda link jo.

Kai $\mu=0$ aprašyta situacija ir yra Hopfo bifurkacija.

II. Kai $\mu=-\frac{1}{4}$, tai sistema patiria histerezę: jei prasideda didelės amplitudės osciliacijos, jos gali būti išjungiamos grąžinant $\mu\to 0$.

Hopfo bifurkacijos stebimos nervų ląstelėse, lėktuvo sparnų vibracijų metu ir pan.

Dažnai sunku atskirti, kurią bifurkaciją stebime (subkritinę ar superkritinę), nes abiem atvejais t. reikšmės iš kairės pusplokštumės „pereina" į dešiniąją.
Atskirti situacijas galima nagrinėjant sprendinių elgseną kintant μ reikšmėms (kompiuteriu).
Taip pat reikėtų nepamiršti, kad egzistuoja dar ir išsigimusi Hopfo bifurkacija. Ji stebima, kai kintant parametrui bifurkacijos taške nekonservatyvi sistema tampa konservatyvia. Išsigimusios bifurkacijos atveju ramybės taškas tampa netiesiniu centru, o ne lėtai susisukančia ar išsisukančia spirale.

Globaliosios bifurkacijos

Dvimatėse dinaminėse sistemose yra 4 atvejai, kada atsiranda arba išnyksta ribiniai ciklai. Kiti trys atvejai, skirtingai nei Hopfo bifurkacija, yra sunkiau aptinkami, nes tenka tirti didelės srities, o ne tik ramybės taško aplinkę. Todėl šios bifurkacijos ir vadinamos globaliosiomis bifurkacijomis.

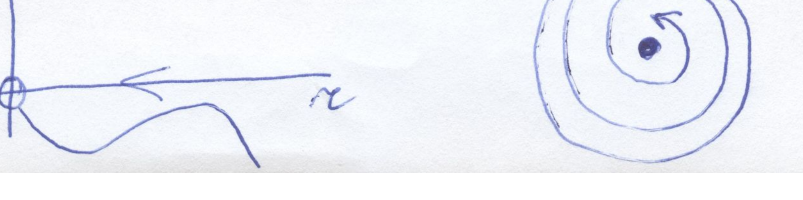
Balno-mazgo ciklų bifurkacija

Bifurkacija, kurios metu du ribiniai ciklai sąveikauja ir susilieja, vadiname balno-mazgo ciklų bifurkacija.
Nagrinėkime sistemą:

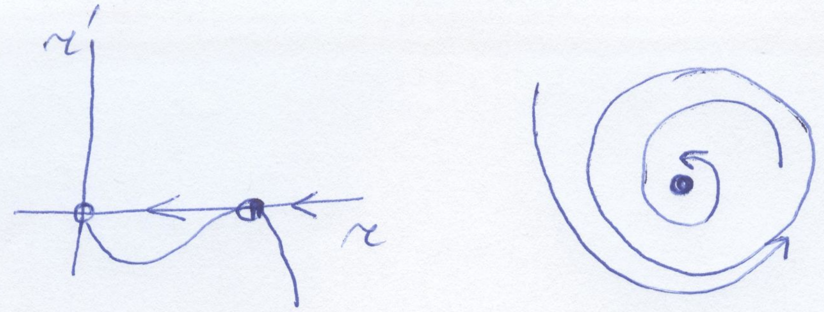
$$\begin{cases} r' = \mu r + r^3 - r^5, \\ \theta' = \omega + b r^2. \end{cases}$$

Tirdami Hopfo bifurkaciją domėjomės tik situacija, kai $\mu = 0$.
Dabar įdomus atvejis, kai $\mu < 0$.
„Kaip matėme tirdami Hopfo bifurkaciją, kai $\mu = -\frac{1}{4}$".
Jau nagrinėjome įvairius sistemos atvejus:

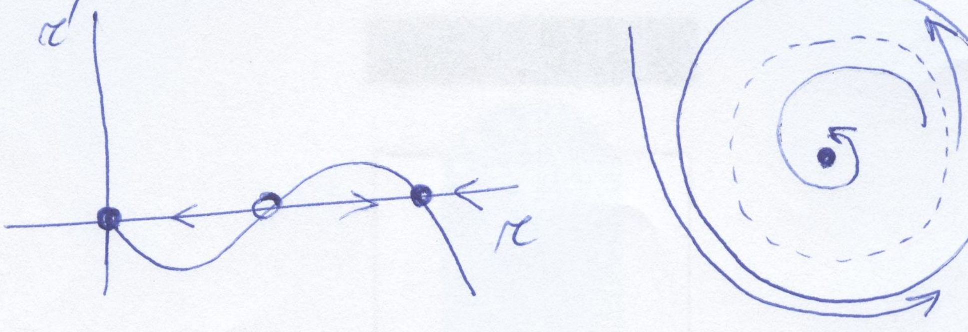
1)



$\mu < \mu_c$

2) 

$\mu = \mu_c$

3) 

$\mu_c < \mu < 0$

Kaip matome, kai $\mu = -\frac{1}{4}$, tai atsiranda pusiaustabilusis ribinis ciklas (tarsi iš niekur). Didėjant μ jis suyra ir atsiranda 2 ribiniai ciklai: stabilusis ir nestabilusis. Iš kitos pusės, mažėjant μ ir artėjant prie μ_c ribiniai ciklai sąveikauja ir susilieja. Tik ramybės taškas $r^* = 0$ nedalyvauja bifurkacijose.

Begalinio periodo bifurkacija

Nagrinėkime dinaminę sistemą

$$\begin{cases} r' = r(1-r^2), \\ \theta' = \mu - \sin\theta, \quad \mu \geq 0. \end{cases}$$

Iš tiesų mes turime dvi aukščiau jau aptartas pirmosios eilės dinamines sistemas: vieną radialine kryptimi, o kitą kampo kitimui.

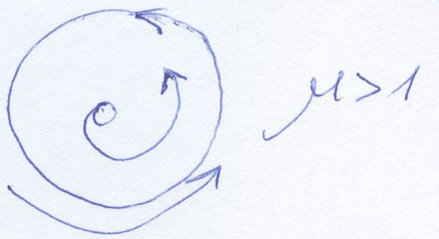
$$r' = r(1-r^2) \Rightarrow \underset{(\text{nestabilus})}{r_1^* = 0}, \ \underset{(\text{stabilus})}{r_2^* = 1}, \ r_3^* = -1 \ (\text{netinka})$$

Trajektorijos, išskyrus $r = 0$, kai $t \to \infty$ artėja prie $r = 1$.

$\theta' = \mu - \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \mu$; žr. (38)

$\mu < 1$, tai turime $\theta_1^* = \arcsin\mu$ – stabilųjį ir nestabilųjį $\theta_2^* = \pi - \arcsin\mu$

Kai $\mu>1$, tai turime 2 ramybės taškus pagal r.



Kai $\mu \to 1^+$, tai ribinis ciklas taške $\theta=\frac{\pi}{2}$ sukuria bifurkaciją, kur ciklas tampa begaliniu, kai $\mu=1$ (t.y. begalinis tampa ciklo periodas). Toliau mažinant μ taškas $\theta=\frac{\pi}{2}$ skyla į du taškus balno ir mazgo.

Tokia bifurkaciją vadiname begalinio periodo bifurkacija.

Homoklininė bifurkacija

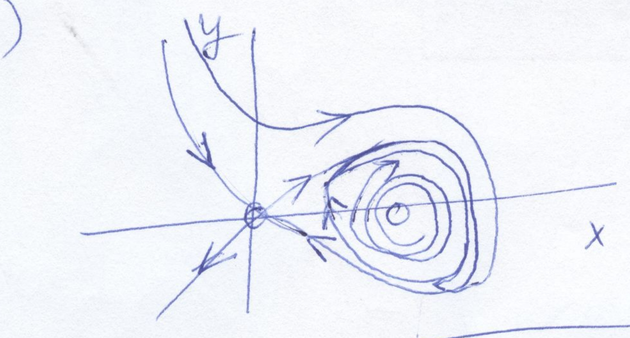
Šios bifurkacijos atveju ribinis ciklas artėja prie balno. Bifurkacijos metu ribinis ciklas susiliečia su balno tašku sukurdamas homoklininę orbitą.

Šiam atvejui sudėtinga surasti sistemą, kuri turėtų patogią formą analizei. Dinaminė sistema buvo tirta kompiuteriu:

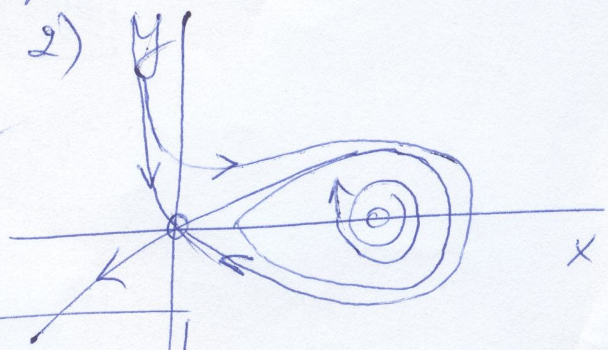
$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \mu y + x - x^2 + xy. \end{cases}$$

Paveikslėliuose matome fazinio portreto dinamiką.

1)



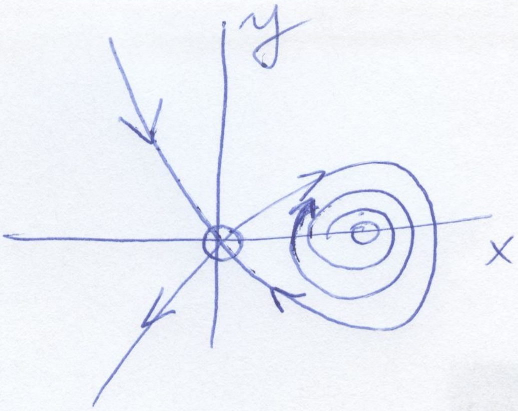
2)



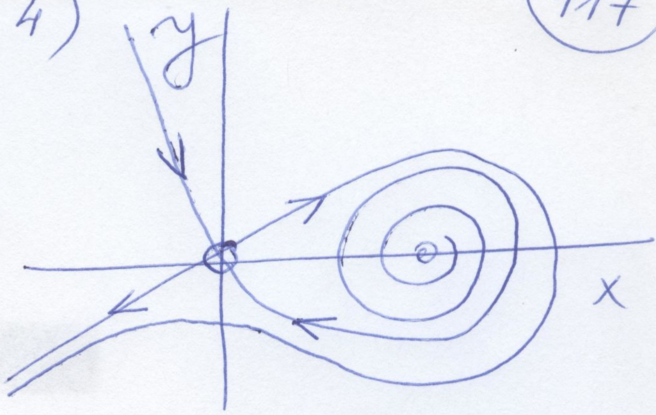
MATLAB

DS_paskaita_ .m

3)



4)



Skaitiškai sistema bifurkaciją patiria, kai $\mu_{krit.} = -0{,}8645$.
Kai $\mu < \mu_{krit.}$, pvz. $\mu = -992$, tai ribinis ciklas priartėja prie balno koordinačių sistemos pradžios taške (1). Kai $\mu \to \mu_{krit.}$, tai ribinis ciklas plečiasi ir susilieja su balnu sukurdamas homoklininę trajektoriją (3). Kai $\mu > \mu_{krit.}$, tai ryšys nutrūksta (4). Šią bifurkaciją lemia nestabiliojo balno taško įtaka.