Galime rasti

$$r = 1{,}001\sqrt{1+\mu}.$$

Tuomet, kai $0<\sqrt{\mu}<1$ egzistuoja uždarosios orbitos žiede

$$0{,}999\sqrt{1-\mu} < r < 1{,}001\sqrt{1+\mu}.$$

Kai negalime nagrinėti sistemos polinėje koordinačių sistemoje, tada galime tirti nulines sistemos izoklines.

Pvz.:

Biocheminio proceso, vadinamo glikolize, metu ląstelės gauna energiją skaidydamos cukrus. Mielių ląstelėse glikolizė (rūgimo procesas) gali įgauti osciliuojantį pobūdį. Analogiška situacija yra ir raumenyse išsiskiriant pieno rūgščiai.

Paprasčiausias tokių osciliacijų modelis yra (bedimensė forma):

$$\begin{cases} x' = -x + ay + x^2 y, \\ y' = b - ay - x^2 y, \end{cases}$$

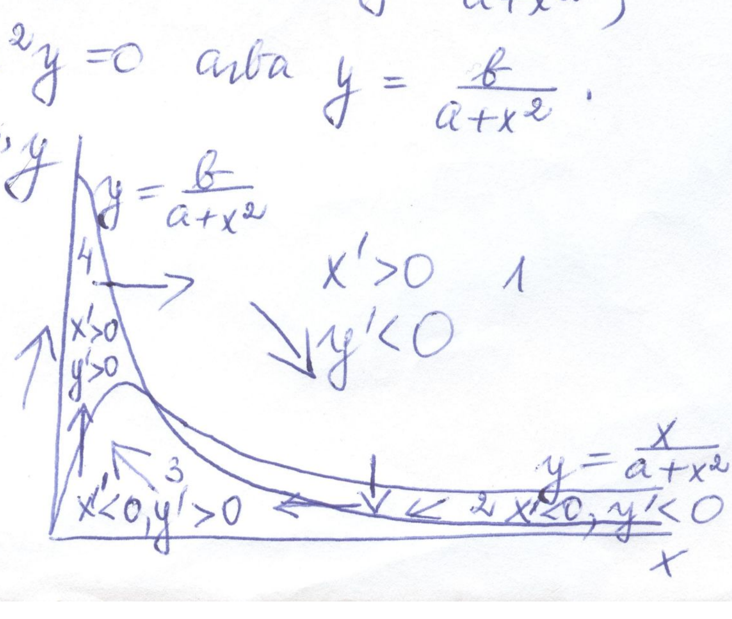
Čia x ir y yra atitinkamai ADP (adenozino difosfatas) ir F6P (fruktozės-6-fosfatas), $a>0$, $b>0$ – kinetiniai parametrai. Reikia sudaryti sistemos pagavimo regioną.

Pirmiausia nustatome nulines izoklines:

$x'=0$, kai $-x+ay+x^2y=0$ arba $y = \dfrac{x}{a+x^2}$;

$y'=0$, kai $b-ay-x^2y=0$ arba $y = \dfrac{b}{a+x^2}$.

Nubrėžiame šias kreives, pažymime sektorius



MATLAB

DS-paskaita_9pav.m

Kreivės susikerta, kai $\frac{b}{a+x^2} = \frac{x}{a+x^2} \Rightarrow \underline{x=b,0}$.

$$\underline{y = \frac{b}{a+b^2}.}$$

<u>1 sritis:</u> $x = 2b,\ y = \frac{2b}{a+b^2}$

$$x' = -2b + a\cdot\frac{2b}{a+b^2} + 4b^2\frac{2b}{a+b^2};$$

$$x' = \frac{\cancel{-2ab} - 2b^3 \cancel{+2ab} + 8b^3}{a+b^2} = \frac{6b^3}{a+b^2} > 0$$

$$y' = b - a\cdot\frac{2b}{a+b^2} - 4b^2\cdot\frac{2b}{a+b^2};$$

$$y' = \frac{ab + b^3 - 2ab - 8b^3}{a+b^2} = \frac{-7b^3 - ab}{a+b^2} < 0$$

<u>2 sritis:</u> $x = 2b,0\ y = \frac{1{,}5b}{a+4b^2}$

Tuomet $x' = -2b + \frac{1{,}5ab}{a+4b^2} + \frac{4b\cdot1{,}5b}{a+4b^2} < 0$

$$y' = b - a\frac{1{,}5b}{a+4b^2} - 4b^2\cdot\frac{1{,}5b}{a+4b^2} < 0$$

<u>3 sritis:</u>

$$x = \frac{1}{2}b,\ y = \frac{0{,}5b}{a+b^2}$$

$$x' = -\frac{1}{2}b + a\cdot\frac{0{,}5b}{a+b^2} - \frac{b^2}{4}\cdot\frac{0{,}5b}{a+b^2};$$

$$x' = \frac{\cancel{-0{,}5ab} - 0{,}5b^3 \cancel{+0{,}5ab} - 0{,}125b^3}{a+b^2};$$

$$x' = \frac{-0{,}625b^3}{a+b^2} < 0$$

$$y' = b - a\cdot\frac{0{,}5b}{a+b^2} - \frac{b^2}{4}\cdot\frac{0{,}5b}{a+b^2};$$

$$y' = \frac{ab + b^3 - 0{,}5ab - 0{,}125b^3}{a+b^2} > 0$$

<u>4 sritis:</u> $x = \frac{1}{2}b$, $y = \frac{3b}{4a+b^2}$ (vienoje kreivėje $y = \frac{4b}{4a+b^2}$, kitoje $y = \frac{2b}{4a+b^2}$)

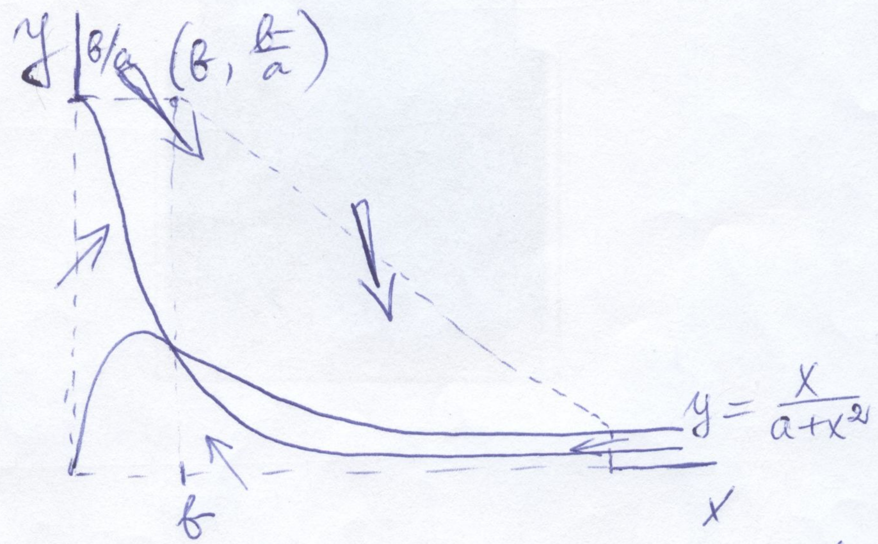
$$x' = -\frac{1}{2}b + a\cdot\frac{3b}{4a+b^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 b^2\cdot\frac{3b}{4a+b^2};$$

$$x' = \frac{-2ab - 0{,}5b^3 + 3ab + 0{,}75b^3}{4a+b^2} > 0$$

$$y' = b - a\cdot\frac{3b}{4a+b^2} - \frac{1}{4}b^2\cdot\frac{3b}{4a+b^2};$$

$$y' = \frac{4ab + b^3 - 3ab - 0{,}75b^3}{4a+b^2} > 0$$

Sudarykime pagavimo regioną (būtinoji sritis).



Pradžioje šis regionas yra tik nuspėjamas. Dabar reikia tikrinti, ar visi vektoriai nuo kraštų yra nukreipti į srities vidurį. Dalį vektorių perkeliame iš ankstesnio brėžinio

$x = \frac{b}{2}$, $y = \frac{b}{2a}$: $x' = -\frac{b}{2} + a\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4}\cdot\frac{b}{2a}$; $x' = \frac{b^3}{8a} > 0$,

$$y' = b - a\cdot\frac{b}{\cancel{2}a} - \frac{b^2}{4}\cdot\frac{b}{2a};\quad y' = \cancel{\frac{4ab}{8a}} - \frac{b^3}{8a} = \cancel{\frac{b}{2}} - \left(\frac{b}{2}\right)^3\frac{1}{a} < 0,$$

nes y gali būti ir didesnis

Iš dar vieno kraštinė, jungianti tašką $(b, \frac{b}{a})$ su izokline $y = \frac{x}{a+x^2}$.

Tiriame x' ir y', kai $x \to \infty$. Tuomet lemiami nariai yra $x' = x^2 y$, o $y' = -x^2 y$, t.y. $\frac{y'}{x'} = -1$.

Vadinasi $\frac{dy}{dx} = -1$, t.y. liestinės krypties koeficientas yra lygus -1. Tai reiškia, kad kryptis lygiagreti tiesei, jungiančiai $(b, \frac{b}{a})$ su kreive $y = \frac{x}{a+x^2}$.

Nagrinėkime skirtumą x' ir $(-y')$ dideliems x argumentams:

$$x' - (-y') = -x + ay + x^2 y + (b - ay - x^2 y) = b - x$$

Vadinasi

$$-y' > x', \text{ kai } x > b.$$

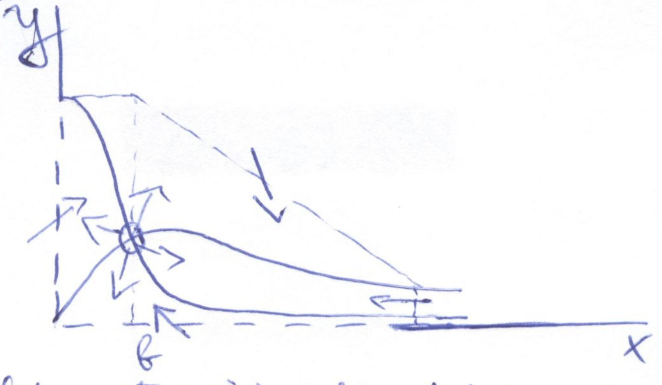
Kadangi $\frac{dy}{dx} < -1$, tai vektorinio lauko kryptis stipriai nukreipta į srities vidų.

Vadinasi nustatytasis regionas yra pagavimo sritis.

Ar galime sakyti, kad pagavimo regione yra uždaros orbitos? Tokiu būdu. Juk pagavimo regione yra ramybės taškas — nulinių izoklinių susikirtimo taškas. Tokiu būdu netenkiname vieno iš Puankarė–Bendiksono teoremos sąlygų.
Tačiau šiuo atveju, jei ramybės taškas bus repeleris, tai galėsime įrodyti uždarų orbitų egzistavimą modifikuotame regione (su maža skylute).

Repeleris sugrąžina visas trajektorijas į regioną, kuriame nėra ramybės taškų ir galioja Puankarė–Bendiksono teorema.

Nustatysime sąlygas, kada taip galėtų būti.



Mus dominanti situacija bus toliau atveju, kai ramybės taškas $\left(b, \frac{b}{a+b^2}\right)$ bus nestabilusis. Jis gali būti nestabilusis mazgas arba židinys.

Uždavinio linearizacijos matrica

$$A=\begin{pmatrix} -1+2xy & a+x^2 \\ -2xy & -(a+x^2) \end{pmatrix}$$

Ramybės taške:

$$A=\begin{pmatrix} -1+\frac{2b^2}{a+b^2} & a+b^2 \\ -\frac{2b^2}{a+b^2} & -(a+b^2) \end{pmatrix}$$

Charakteringoji lygtis:

$$\lambda^2-\left(\frac{-a+b^2-(a+b^2)^2}{a+b^2}\right)\lambda+\left(-(a+b^2)\left(-1+\frac{2b^2}{a+b^2}\right)+2b^2\right)=0$$

Kaip žinome, ramybės taškas bus nestabilusis, kai $\tau>0$ ir stabilusis, kai $\tau<0$.

Taigi $\tau=0$ yra skiriamoji linija.

Tirkime τ, kuris yra:

$$\tau=\frac{-a+b^2-a^2-2ab^2-b^4}{a+b^2}$$

$a+b^2>0$, nes $a>0$ ir $b>0$.

Tuomet nagrinėjame skaitiklį

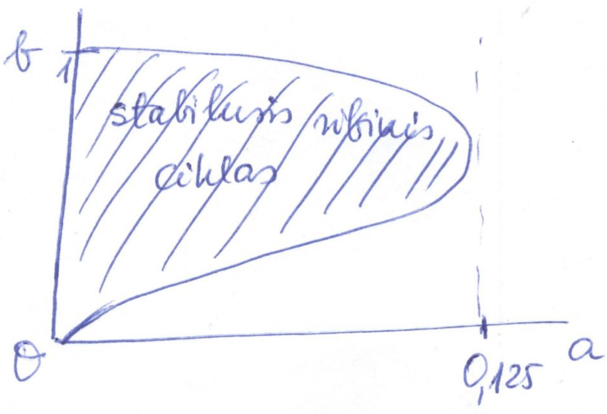
$$-a+b^2-a^2-2ab^2-b^4=0$$

$$b^4+b^2(2a-1)+a+a^2=0$$

$$b^2_{1,2}=\frac{1-2a\pm\sqrt{(2a-1)^2-4(a+a^2)}}{2}$$

$$b^2_{1,2}=\frac{1-2a\pm\sqrt{1-8a}}{2}$$

Skirstančioji linija atskiria sritį, kurioje ramybės taškas yra stabilusis.



MATLAB
DS-paskaita-9pav.mn

Vadinasi, parametrams esant regione, kur $\tau>0$, mes esame tikri, kad sistema turi uždarąją orbitą. Kompiuteriniai skaičiavimai rodo, kad tai – stabilusis ribinis ciklas.

Su $a=0{,}08$, $b=0{,}6$ MATLAB DS-paskaita-8pav.mn

Fazinėje plokštumoje chaoso nėra

Puankarė–Bendiksono teorema yra pagrindinis netiesinės dinamikos rezultatas. Ji tvirtina, kad dinamikos galimybės yra labai ribotos: jei trajektorija yra nukreiptas į uždarą sritį, kurioje nėra ramybės taškų, tai ji ilgainiui pasiekia uždarą orbitą.

Toks tvirtinimas teisingas tik plokštumoje. Didesnės dimensijos sistemoms ($n\geq 3$) Puankarė–Bendiksono teorema jau negalioja. Čia trajektorijos visą laiką gali judėti aplinkui tam tikroje uždaroje srityje taip ir nepasiekdamos uždaros orbitos.

Kartais trajektorijos gali būti pritraukiamos atraktoriujo, kurie jautrūs pradinių sąlygų pokyčiams. Šis jautrumas ir daro judėjimą nenuspėjamu. Susiduriame su chaosu.
Dabar tik konstatuojame, kad fazinėje pl-mėje chaoso negali būti.

Lienardo sistema

Netiesinės dinamikos teorijos pradžioje (1920 – 1950) daug dėmesio buvo skiriama netiesiniams osciliatoriams, kurie susiję su radijo technologijomis. Buvo nustatyta, kad daugelį osciliuojančių grandinių aprašo tokia antrosios eilės dif. lygtis:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0,$$ kurį žinome kaip **Lienardo lygtis**.

Ši lygtis yra van der Polio lygties $x'' + \mu(x^2-1)x' + x = 0$ apibendrinimas.
Mechaninė Lienardo lygties prasmė yra vienetinės masės kūno judėjimas veikiant netiesinei slopinimo jėgai $f(x)x'$ ir netiesinei grąžinančiajai jėgai $g(x)$.
Lienardo lygtis ekvivalenti tokiai sistemai:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -g(x) - f(x)y. \end{cases}$$

Lienardo teorema nustato, kad esant tam tikroms f-joms $f(x)$ ir $g(x)$ Lienardo sistema turi vienintelį stabilųjį ribinį ciklą.

Lienardo teorema:

Tarkime, kad $f(x)$ ir $g(x)$ tenkina šiuos reikalavimus:
1) $f(x)$ ir $g(x)$ tolydžiai diferencijuojamos $\forall x$,
2) $g(-x) = -g(x)$, $\forall x$ ($g(x)$ – nelyginė f-ja),
3) $g(x) > 0$, kai $x > 0$,
4) $f(-x) = f(x)$, $\forall x$ ($f(x)$ – lyginė f-ja),
5) nelyginė f-ja $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$ yra lygi 0 tik, kai $x = a$. $F(x)$ – neigiama, kai $0 < x < a$; teigiama ir nemažėjanti, kai $x > a$,

$F(x) \to \infty$, kai $x \to \infty$.

Tuomet Lienardo sistema turi vienintelį stabilųjį ribinį ciklą supantį koordinačių sistemos pradžios tašką O.

Pvz. Parodysime, kad van der Polio lygtis turi vienintelį stabilųjį ribinį ciklą.

Van der Polio lygtis

$$x'' + \mu(x^2-1)x' + x = 0.$$

Tuomet $f(x) = \mu(x^2-1)$, o $g(x) = x$.

Šioms f-joms galioja 1)-4) Lienardo teoremos sąlygos. Tikriname 5) sąlygą, t.y.

$$F(x) = \int_0^x \mu(u^2-1)\,du = \mu\left(\frac{u^3}{3} - u\right)\Big|_0^x = \frac{1}{3}\mu x(x^2-3)$$

Kai $x = \sqrt{3}$, tai tenkinama ir 5) sąlyga. Remiantis Lienardo teorema, lygtis turi vienintelį stabilųjį ribinį ciklą.