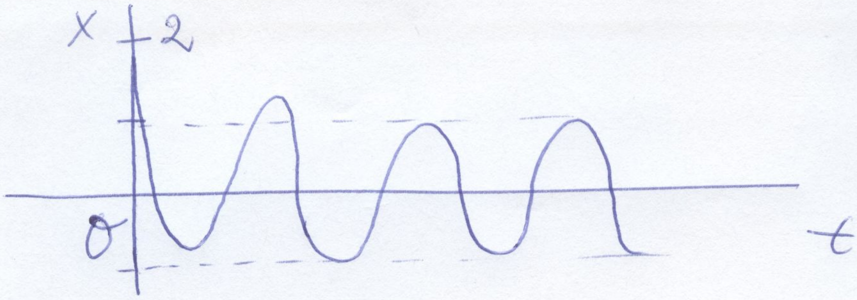


2) netiesinėje dinamikoje labai svarbi van der Polo lygtis

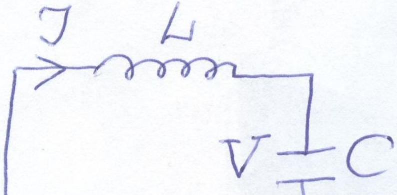
$$x'' + \mu(x^2-1)x' + x = 0, \quad \mu \geq 0.$$

Ji siejama su netiesinėmis elektros grandinėmis, naudotomis pirmuosiuose radijo imtuvuose.

Lygtis primena harmoninį oscilatorių. Tik šiuo atveju gesimo narys yra netiesinis, t.y. $\mu(x^2-1)x'$.

Kai $|x|>1$, tai turime teig. slopinimo narį, o kai $|x|<1$, tai slopinimo narys – neigiamas. Kitaip tariant, jis priverčia gesti didelės amplitudės osciliacijas, tačiau kita vertus jas didina tada, kai jos tampa per mažos.

Netiesinė elektros grandinė elgiasi analogiškai:



N – netiesinis aktyvusis elementas, kurio srovės ir įtampos ryšys $V_N = f(I)$

Netiesiniame elemente didinant įtampą, didėja srovės stiprumas. Tačiau, kai jame įtampa maža, tai srovė ima tekėti priešinga kryptimi. Vakuuminė lempa radijo imtuvuose buvo šis netiesinis elementas.

Imkime $\mu=1{,}5$, $x(0)=0{,}5$, $x'(0)=0$ ir spręskime lygtį

$$x'' + 1{,}5(x^2-1)x' + x = 0$$

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - 1{,}5(x^2-1)y. \end{cases}$$

Ramybės taškai:

$$\begin{cases} y = 0, \\ -x - 1{,}5(x^2-1)y = 0. \end{cases} \Rightarrow (0,0).$$

Linearizuojame sistemą. Jordano matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-3xy & -1{,}5x^2+1{,}5 \end{pmatrix}$$

Taške $(0,0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1{,}5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

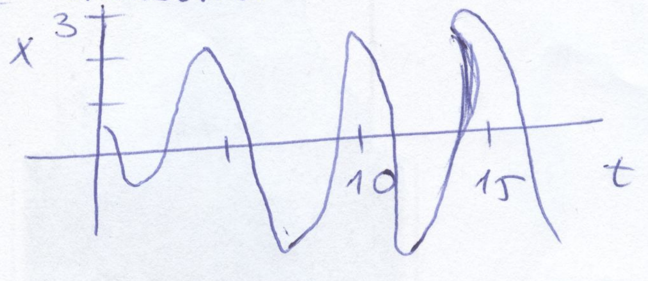
$$\lambda^2 - 1{,}5\lambda + 1 = 0$$

$$\underline{\tau = 1{,}5}, \ \underline{\Delta = 1}, \ \underline{D = 2{,}25 - 4 < 0}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{1{,}75}\,i}{2}$$

$(0,0)$ ramybės taškas yra nestabilusis židinys. MATLAB DS-paskaita_7pav. 8pav.

Šiuo atveju ribinis ciklas nėra apskritimas ir stabilioji bangos forma nėra sinusoidė.



Uždarų orbitų nebuvimo požymiai

I. Gradientinės sistemos.

Jei sistema gali būti užrašyta pavidalu $\vec{x}' = -\nabla V$, $V(\vec{x})$ – tolydžiai diferencijuojama vieno kintamojo skaliarinė f-ja. Tokia sistema vadinama gradientine sistema su potencialo funkcija V.

Th. Gradientinėse sistemose nebūna uždarų orbitų.

Įrodymas:

Randame $\Delta V = 0$, nes V – vieno argumento f-ja.

Iš kitos pusės

$$\Delta V = \int_0^T \frac{dV}{dt}\,dt = \int_0^T (\nabla V \circ \vec{X}')\,dt =$$

$$\frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \int_0^T (-\vec{X}' \cdot \vec{X}')\,dt = -\int_0^T \|\vec{X}'\|^2\,dt \leq 0$$

Tuomet $\|\vec{X}'\| = 0$, kai $\vec{X}' = 0$, bet tokiu atveju trajektorija nėra orbita, o tik ramybės taškas. Vadinasi, orbitos negalimos.

Įrodyta.

Pvz.: Parodysime, kad sistema

$$\begin{cases} x' = \sin y, \\ y' = x\cos y \end{cases}$$ neturi uždarųjų orbitų.

Šią sistemą galime užrašyti pavidalu

$$(*) \quad \vec{X}' = -\nabla V, \text{ nes}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \sin y, \quad o \quad \frac{\partial V}{\partial y} = x\cos y, \text{ kai } V = x\sin y$$

Kad galiotų $(*)$ turime imti $V = -x\sin y$, o tada

$$\begin{cases} x' = -(-\sin y), \\ y' = -(-x\cos y) \end{cases} \Rightarrow \text{duotoji sistema.}$$

Vadinasi duotoji sistema yra gradientinė, t.y. neturi uždarų orbitų.

Bendru atveju, sistema yra gradientinė, jei $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$,

kai $\begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y). \end{cases}$

II. Liapunovo f-jos.

Tai funkcijos, kurių energija bėgant laikui mažėja, t.y. pačios funkcijos imituoja pilnąją dinaminės sistemos energiją (dažnai tai nėra tikroji mechaninė energija).

Jei egzistuoja Liapunovo f-ja, tai sistema neturi uždarųjų orbitų.

Suformuluokime tiksliau.

Nagrinėkime sistemą $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$, kurios ramybės taškas $\vec{x}^*$. Mes norime surasti Liapunovo f-ją, t.y. tolydžiai diferencijuojamą f-ją $V(\vec{x})$, tenkinančią šias sąlygas:

1) $V(\vec{x}) > 0$, $\forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$, o $V(\vec{x}^*) = 0$.

Ši sąlyga reiškia, kad f-ja yra teigiamai apibrėžta.

2) $V' < 0$, $\forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$ $\left(V' = \frac{\partial V}{\partial t}\right)$, t.y. visos trajektorijos „leidžiasi nuo kalno" link ramybės taško $\vec{x}^*$. Tokiu būdu $\vec{x}^*$ – globaliai asimptotiškai stabilus su visomis pradinėmis sąlygomis, t.y. $\vec{x}(t) \to \vec{x}^*$, kai $t \to \infty$. Vadinasi sistema neturi uždarųjų orbitų.

Turint tokį Liapunovo f-jos apibrėžimą lieka neaišku, kaip jas reikia sukonstruoti. Tokios teorijos ar taisyklių nėra. Kartais gelbsti kvadratinės formos.

III. Dulako kriterijus.

Jis remiasi Gryno teorema.

Kriterijus. Tegul $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ yra tolydžiai diferencijuojamas vektorinis laukas, apibrėžtas silpnai jungiajame plokštumos poaibyje R. Jei egzistuoja tolydžiai diferencijuojama realiojo argumento f-ja $g(\vec{X})$ tokia, kad

$\nabla\cdot(g\cdot\vec{X}')$ turi pastovų ženklą visoje srityje R, tai

tuomet nėra uždarų orbitų, priklausančių sričiai R.

Įrodymas:

Tarkime priešingai, t.y. tegul C – uždaroji orbita, priklausanti sričiai R.

Tegul A – srities ribojamos C vidus. Tuomet pagal Gryno teoremą

$$\iint_A \nabla\cdot(g\vec{X}')\,dA = \oint_C g\vec{X}'\cdot\vec{n}\,dl,$$

$\vec{n}$ – išorinė normalė, dl ilgio elementas kreivėje C.

Kadangi $\nabla\cdot(g\vec{X}')$ turi pastovų ženklą, tai

kairės pusės integralas nelygus 0.

Dešinėje pusėje mes turime $\vec{X}'\cdot\vec{n}=0$, nes

liestinė ir normalė yra viena kitai statmenos.

Gautoji prieštara įrodo, kad tokių atvejų nėra uždarųjų orbitų.

Įrodyta.

Dulako kriterijus neturi kokio nors algoritmo, kuriuo vadovaujantis būtų galima ištirti dinamines sistemas.

Paprastai tyrimui pasirenkame $g=1$, $g=e^{ax}$, $g=e^{ay}$, $g=\frac{1}{x^a}y^b$.

Pvz.: Parodysime, kad dinaminė sistema

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x-y+x^2+y^2 \end{cases}$$

neturi uždarųjų orbitų.

Imkime $g=e^{-2x}$. Tuomet $\nabla\cdot(g\vec{X}')=\nabla\cdot\begin{pmatrix}e^{-2x}y\\ e^{-2x}(-x-y+x^2+y^2)\end{pmatrix}$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(e^{-2x}y)+\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-2x}(-x-y+x^2+y^2)\right)=$$

$= -2e^{-2x}y + e^{-2y}(-1+2y) = e^{-2x}(-2y-1+2y) =$

$= -e^{-2x} < 0.$

Kadangi $\nabla\cdot(g\vec{X}')$ yra pastovaus ženklo, tai nagrinėjama Dulako lygčių sistema uždarųjų orbitų neturi.

Uždarųjų orbitų nustatymas

Suformuluokime vieną svarbiausių netiesinės dinamikos rezultatų. Ji garantuoja chaoso nebuvimą dvimačiame atvejy.

Puankarė–Bendiksono teorema.

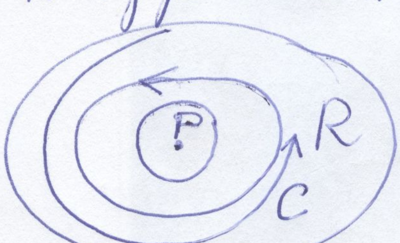
Tarkime, kad

1) R yra uždara aprėžta plokštumos sritis,

2) $\vec{X}' = \vec{f}(X)$ yra tolydžiai diferencijuojamas vektorinis laukas atviroje srityje, apimančioje R,

3) nėra ramybės taškų, priklausančių sričiai R,

4) egzistuoja trajektorija C, „uždaryta" srityje R, t.y. kad ji prasideda srityje R ir joje lieka visą laiką.



Tuomet arba C yra uždaroji orbita, arba C prie jos asimptotiškai artėja spirale, kai $t \to \infty$.

1)–3) sąlygos nesunkiai patikrinamos. Kiek sunkiau su 4) sąlyga. Čia paprastai elgiamasi taip: sudaroma pagavimo zona R, t.y. uždaroji žiedinė sritis, į kurią yra nukreipti vektoriniai laukai iš visų kraštų.

Puankarė – Bendiksono teoremą nėra lengva taikyti praktiškai. Patogu ją taikyti tik polinėje koordinačių sistemoje.

Pvz.: Nagrinėkime dinaminę sistemą

$$\begin{cases} r' = r(1-r^2) + \mu r \cos\theta, \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Tokią sistemą, kai $\mu = 0$ tyrinėjome, kai pradėjome nagrinėti ribinius ciklus (80)

Matėme, kad sistema turi ribinį ciklą, kai $r = 1$. Parodysime, kad uždarosios orbitos egzistuoja, kai $\mu > 0$, o μ – pakankamai mažas.

Ieškome koncentriškų apskritimų, kurių spinduliai r_{min} ir r_{max}, o $r' < 0$ išoriniame apskritime, $r' > 0$ – vidiniame apskritime. Tuomet žiedas $0 < r_{min} \leq r \leq r_{max}$ yra pagavimo regionas. Kadangi $\theta' > 0$, tai ramybės taškų pagavimo regione nėra. Jei nustatysime r_{min} ir r_{max}, tai galios Puankarė – Bendiksono teorema ir tuo pačiu uždarosios orbitos.

Kad rastume r_{min} reikalaujame, kad $r' > 0, \forall \theta$.

$$r' = r(1-r^2) + \mu r \cos\theta$$

$r(1-r^2 + \mu\cos\theta)$, $r > 0$, tai turi būti $1 - r^2 + \mu\cos\theta > 0$

$\cos\theta \geq -1$, tai tuomet

$$1 - r^2 - \mu > 0 \Rightarrow r_{min} < \sqrt{1-\mu},$$

$0 < \mu < 1$. Reikia parinkti r_{min} galimai didelį, tai vietoje $r = \sqrt{1-\mu}$ galima imti $r = 0{,}999\sqrt{1-\mu}$ kad tikrai patektume į vidų.

Ieškome r_{max}, t.y., kur $r' < 0$, $\forall \theta$.

$$1 - r^2 + \mu\cos\theta < 0$$

$\cos\theta \leq 1$, t.y. $1 + \mu - r^2 < 0$

$$r > \sqrt{1+\mu}$$

Galimi ratai
$$r = 1{,}001\sqrt{1+\mu}.$$

Tuomet, kai $0<\mu<1$ egzistuoja uždarosios orbitos žiede
$$0{,}999\sqrt{1-\mu} < r < 1{,}001\sqrt{1+\mu}.$$

Kai negalime nagrinėti sistemos polinėje koordinačių sistemoje, tada galime tirti nulines sistemos izoklines.

<u>Pvz.:</u>

Biocheminio proceso, vadinamo glikolize, metu ląstelės gauna energiją skaidydamos cukrų. Mielių ląstelėse glikolizė (rūgimo procesas) gali įgauti osciliuojantį pobūdį. Analogiška situacija yra ir raumenyse išsiskiriant pieno rūgštai.

Paprasčiausias tokių osciliacijų modelis yra (bedimensė forma):

$$\begin{cases} x' = -x + ay + x^2 y, \\ y' = b - ay - x^2 y, \end{cases}$$

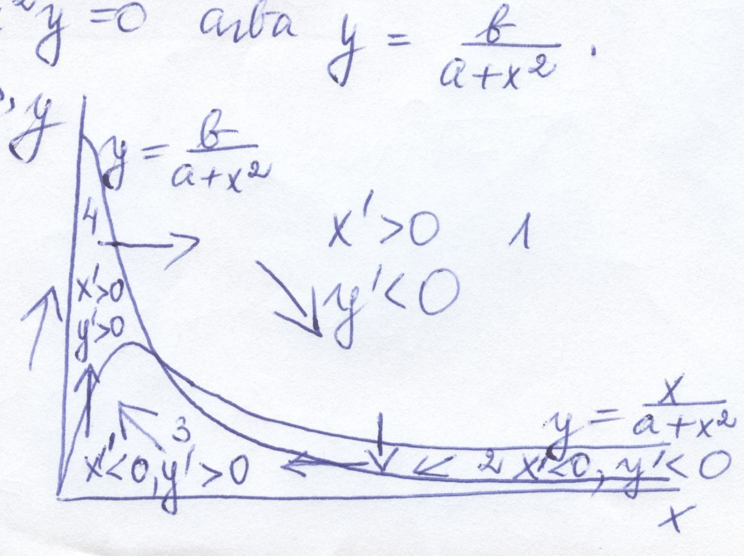
Čia x ir y yra atitinkamai ADP (adenozino difosfatas) ir F6P (fruktozės-6-fosfatas), $a>0$, $b>0$ – kinetiniai parametrai. Reikia sudaryti sistemos pagavimo regioną.

Pirmiausia nustatome nulines izoklines:

$x'=0$, kai $-x+ay+x^2y=0$ arba $y = \dfrac{x}{a+x^2}$;

$y'=0$, kai $b-ay-x^2y=0$ arba $y = \dfrac{b}{a+x^2}$.

Nubrėžiame šias kreives, pažymime vektorius



MATLAB

DS-paskaita—9pav. mn