Gauname, kad mažų pokyčių dif. lygtis

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + O(u^2, v^2, uv).$$

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x^*, y^*)}$$ vadiname Jakobio (Žordano)

matrica ramybės taškams (x^*, y^*).

Atmetę mažus skleidinio narius mes gauname linearizuotą sistemą:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$ kurios analizei skirta

teorija, skirta tiesinių dinaminių sistemų tyrimui.

<u>Netiesinių narių įtaka</u>

Kvadratinių narių įtaka ramybės taškų aplinkoje nėra svarbi tik tam tikro laiko, t.y. tol, kol ramybės taškas nėra vienas iš ribinių linijų taškų (centras, dikritinis, išsigimęs mazgas, neizoliuotas ramybės taškas). Šiais atvejais svarbi netiesinių mažų narių įtaka.

Panagrinėkime pavyzdį.

<u>Pvz.</u> 1) $\begin{cases} x' = -x + x^3, \\ y' = -2y \end{cases}$

Raskime ramybės taškus. Linearizuodami sistemą nustatykite jų tipą. Tuomet patikrinsime gautą rezultatą nubrėždami pilnos netiesinės sistemos fazinį portretą.

$$\begin{cases} -x + x^3 = 0, \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(-1 + x^2) = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}. \quad \begin{matrix} x_1 = 0, \; x_{2,3} = \pm 1, \\ y = 0. \end{matrix}$$

Taigi, turime 3 ramybės taškus: $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$.

Žordano matrica šiai dinaminei sistemai yra:

$$A=\begin{pmatrix}-1+3x^2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

1) ramybės taške $(0,0)$, matrica $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

Randame t. reikšmes

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$$

$$\lambda^2+3\lambda+2=0,\ \underline{\tau=-3},\ \Delta=2\quad \underline{D=9-8>0}$$

<u>stabilusis mazgas</u>

2) ramybės taške $(-1,0)$, matrica $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

Randame t. reikšmes

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=-2$$

$$\lambda^2-4=0,\ \tau=0,\ \Delta=-4,\ D=16>0$$

$\underline{\Delta<0}$

<u>balnas</u>

3) ramybės taške $(1,0)$, matrica $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

Turime tą pačią situaciją kaip ir 2) atvejyje, t.y. ramybės taškas $(1,0)$ – <u>balnas.</u>

Gavome 3 nelinijinius rimties taškus.

Kadangi sistemos lygtys nėra surištos, tai kiekviena jų gali būti tiriama atskirai.

Iš antrosios sistemos lygties $y(t)=y_0e^{-2t}$, t.y. kai $t\to\infty$, $y(t)\to 0$.

Horizontalioje kryptimi $y'=0 \Rightarrow y=0$.

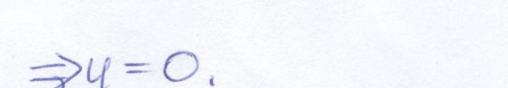
Šioje tiesėje turime taškus $x_1=-1$, $x_2=0$ ir $x_3=1$.

Kai $x<-1$, tai $x'<0$,

kai $-1<x<0$, tai $x'>0$,

kai $0<x<1$, tai $x'<0$,

kai $x>1$, tai $x'>0$.



Turime vieną atraktorių ($x=0$) ir 2 repelerius ($x=\pm 1$).

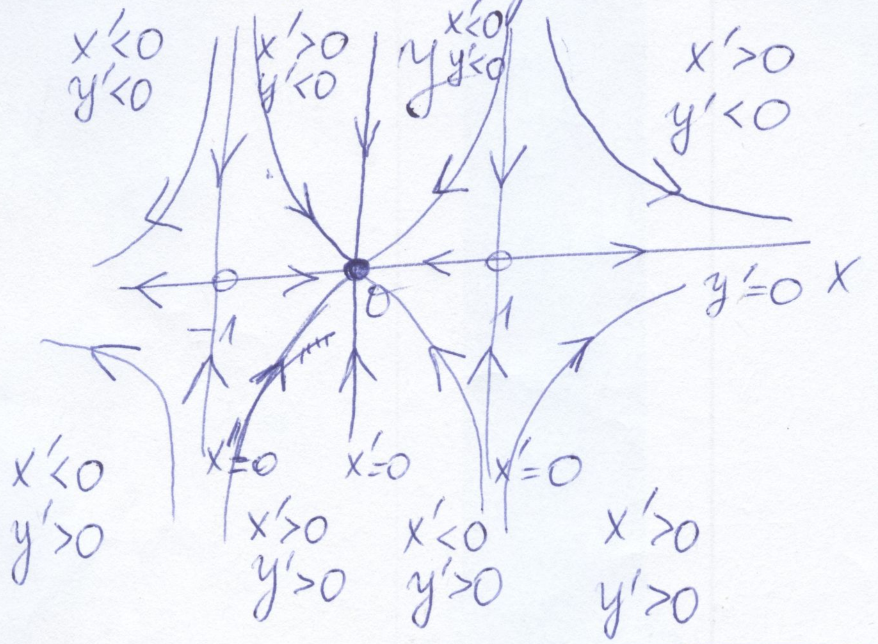
Vertikaliąja kryptimi
$$x'=0 \Rightarrow x=0,\ x=\pm 1$$

Šiose tiesėse prasidedančios trajektorijos jose lieka visą laiką.

$y'>0$, kai $y<0$,

$y'<0$, kai $y>0$.

Schematiškai šį vaizdą galime iliustruoti taip:



MATLAB
DS-paskaita – 5 pav. mn

Kaip matome, smulkieji netiesiniai (aukštesnės eilės) nariai keičia šitaip fazinį portretą.

2) Nagrinėkime netiesinę dinaminę sistemą
$$\begin{cases} x' = -y + ax(x^2+y^2), \\ y' = x + ay(x^2+y^2). \end{cases}$$

Ramybės taškai:
$$\begin{cases} -y + ax(x^2+y^2) = 0 \\ x + ay(x^2+y^2) = 0. \end{cases} \Rightarrow x=y=0$$

Turime vieną ramybės tašką $(0,0)$.

Sudarome Žordano matricą:

$$A=\begin{pmatrix} 3ax^2+ay^2 & -1+2axy \\ 1+2axy & ax^2+3ay^2 \end{pmatrix}$$

$$A|_{(0,0)}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ieškome t. reikšmių

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2+1=0\ ,\quad \lambda_{1,2}=\pm i$$

$$\underline{\tau=0},\ \Delta=1>0,\ \underline{D=-4<0}$$

Kaip matome, ramybės taškas yra $\underline{\text{centras}}$.

Nagrinėkime netiesinę sistemą. Norėdami surasti sprendinį, pakeiskime koordinates. Pereikime prie polinių koordinačių:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$$

$$x'=r'\cos\varphi+r(-\sin\varphi)\cdot\varphi'$$

$$y'=r'\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\varphi'$$

Gauname:

$$\begin{cases} (1)\quad r'\cos\varphi-r\sin\varphi\cdot\varphi'=-r\sin\varphi+a\cdot r\cos\varphi\,\underbrace{(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)}_{=r^2}, \\ (2)\quad r'\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\varphi'=r\cos\varphi+a\cdot r\sin\varphi\cdot\underbrace{(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)}_{=r^2}. \end{cases}$$

(1) lygtį dauginame iš $\cos\varphi$, o (2) iš $\sin\varphi$ ir sudedame:

$$r'=ar^3\ (3)$$

(1) lygtį dauginame iš $\sin\varphi$, o (2) iš $\cos\varphi$ ir ~~sudedame~~ (atimame):

$$-r\varphi'=-r$$

$$\varphi'=1\ (4)$$

Gavome tokią sistemą:

$$\begin{cases} r' = ar^3, \\ \varphi' = 1. \end{cases}$$

Matome, kad lygtys yra nesurištos ir gali būti išspręstos atskirai.

Išsprendę antrąją sistemos lygtį, gauname, kad visos trajektorijos juda pastoviu kampiniu greičiu $\varphi = \varphi_0$.

Iš $r' = ar^3$ gauname $-\frac{1}{2r^2} = at + C$

arba $C = -\frac{1}{2r_0^2}$ ir $r^2 = \frac{1}{2\left(-at + \frac{1}{2r_0^2}\right)}$

Sprendinys priklauso nuo a.

Kai $a=0$, tai $r^2 = r_0^2$,

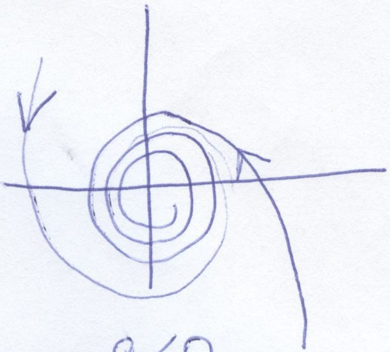
Kai $a>0$, tai $r \to \infty$, kai $t \to \infty$,

Kai $a<0$, tai $r \to 0$, kai $t \to \infty$.

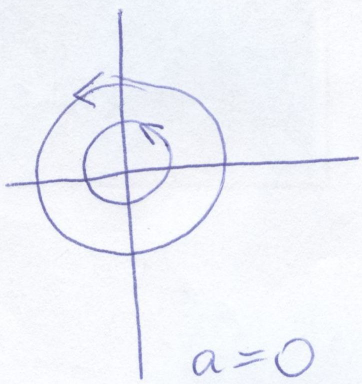
Šiuo atveju turime ribinės linijos ramybės tašką todėl ir susidūrėme su problemomis.

Tiesiogiai sudarius linearizaciją turime, kad ramybės taškas – centras.

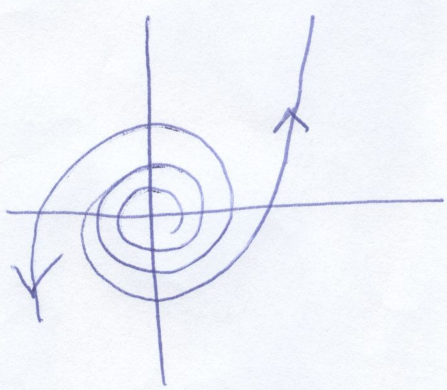
Spręsdami netiesinę sistemą gauname 3 atvejus, kurių vienas – centras, o kiti du – nestabilūs / stabilus židiniai.



$a<0$



$a=0$



$a>0$

MATLAB

DS_paskaita_6pav.m

Nagrinėtas pavyzdys parodo centro jautrumą netiesiškumams. Taip nutinka dėl to, kad centro atveju trajektorijos yra uždaros ir fazinėje pl-moje judėdamas trajektorije taškas turi tiksliai sugrįžti į pradinį tašką. Tuo tarpu maži netiesiniai nariai sutrukdo sistemą ir uždarosios orbitos pavirsta spirale (židinys-sukimosi taškas).

Analogiškai, nestabilieji mazgai (išsigimęs ir dikritinis mazgas) gali virsti nestabiliaisiais židiniais.

Stabilieji mazgai gali virsti stabiliaisiais židiniais.

Reikia žiūrėti (57) konspekto psl. esančią klasifikacinę diagramą. Joje matyti, kad peržengę ribinę situaciją ramybės taškai keičia trajektorijas, bet stabilumas išlieka toks pats.

Tik centrai, esantys tiesėje, skiriančioje stabiliuosius ir nestabiliuosius židinius, gali virsti tiek stabiliaisiais, tiek nestabiliaisiais židiniais.

Jei mes nesidomime pačiomis trajektorijomis, o tik jų stabilumu, tai tuomet ramybės taškų klasifikacija gali būti ir tokia:

repeleriai (šaltiniai): abiejų t. reikšmių realiosios dalys - teigiamos,

atraktoriai: abiejų t. reikšmių realiosios dalys - neigiamos,

balnai: viena t. reikšmė teigiama, o kita - neigiama.

Ribiniai atvejai:

centrai: abi t. reikšmės yra grynai menamosios,

aukštesnės eilės ir neizoliuoti ramybės taškai: bent viena t. reikšmė lygi 0.

Kaip matome ribiniai atvejai yra jautrūs netiesiniams nariams, o jie atsiranda, kai $Re(\lambda)=0$.

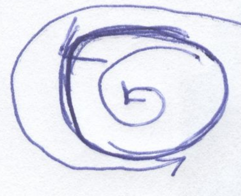
Ribiniai ciklai

Ribinis ciklas – tai uždara izoliuota trajektorija. Izoliuota reiškia, kad kitos greta esančios trajektorijos nėra uždaros; jos yra spiralės artėjančios arba tolstančios nuo ribinio ciklo. Jei kiekviena gretima trajektorija artėja prie ribinio ciklo, tai sakome, kad ribinis ciklas yra stabilusis arba pritraukiantis.

stabilusis ribinis ciklas

Kitu atveju, ribinis ciklas yra nestabilusis:

Gali būti ir išskirtinis atvejis – pusiau stabilusis ciklas.

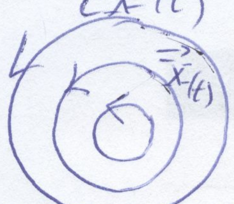


viena trajektorija artėja, o kita – tolsta...

Moksliniu požiūriu stabilieji ribiniai ciklai yra įdomūs, nes jais modeliuojamos sistemos, turinčios savaiminius virpesius (autovirpesius), t.y. šios sistemos osciliuoja savaime neveikiant išorinei periodinei jėgai. Pvz.: širdies dūžiai, žmogaus temperatūros dienos ritmas, spontaniškai osciliuojančios cheminės reakcijos. Kiekvienu atveju, mes turime svyravimus (osciliacijas) su tam tikru periodu, bangos forma ir amplitude. Jei sistema yra lengvai (nežymiai) sutrikdoma, tai ji visuomet sugrįžta į įprastinį ciklą.

Ribiniai ciklai – išskirtinai netiesiniai reiškiniai. Jų nebūna tiesinėse sistemose.

Kaip žinome, tiesinės sistemos $\vec{X}' = A\vec{X}$ gali turėti sprendinius – uždaras orbitas, tačiau jos negali būti izoliuotos. Jei $\vec{X}(t)$ – periodinis sprendinys, tai ir $C\vec{X}(t)$, $C \neq 0$ – sprendinys, t.y.



Tiesinių osciliacijų amplitudė priklauso tik nuo pradinių sąlygų. Bet koks (net ir nežymus) sistemos sutrikdymas trajektoriją perveda į kitą orbitą visam laikui. Tuo tarpu ribiniai ciklai yra nustatomi pačios sistemos, o ne pradinių sąlygų. Tik iš lygčių nėra lengva nustatyti, ar sistema turi ribinių ciklų ar tik uždaras orbitas. Yra metodai, kurie leidžia įrodyti ribinių ciklų buvimą arba nebuvimą. Yra analiziniai metodai, leidžiantys nustatyti ribinių ciklų formą ir periodą, tirti stabilumą. Ribinius ciklus patogu konstruoti polinėje koordinačių sistemoje.

Pvz.: 1) Tarkime sistemą

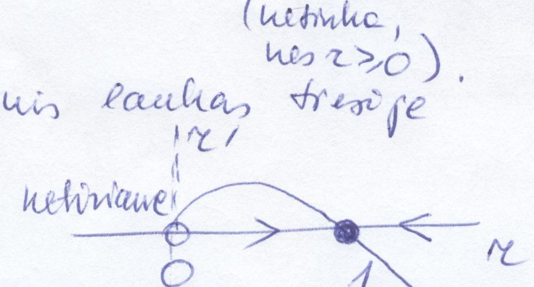
$$\begin{cases} r' = r(1-r^2), \\ \theta' = 1, \quad r \geq 0. \end{cases}$$

Kiekviena sistemos lygtis gali būti tiriama atskirai.

Tarkime $r' = r(1-r^2)$.

turime $r_1^* = 0$, $r_2^* = -1$, $r_3^* = 1$
(netinka, nes $r \geq 0$).

Vektorinis laukas tiesėje



Antroji lygtis ramybės taškų neturi.

Fazinėje pl-moje gauname, kad mūsų trajektorijos, išskyrus $r^*=0$ artėja prie vienetinio apskritimo.

Spręskime sistemą:

$$\int \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int dt$$

$$\frac{1}{r(1-r^2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{1-r} + \frac{C}{1+r} = \frac{A - Ar^2 + Br + Br^2 + Cr - Cr^2}{r(1-r^2)}$$

$$\begin{cases} -A+B-C=0, \\ B+C=0, \quad B=-C \Rightarrow \underline{C=-\frac{1}{2}}, \ \underline{B=\frac{1}{2}}. \\ \underline{A=1}. \end{cases}$$

Tuomet
$$\ln|r| - \frac{1}{2}\ln|1-r| - \frac{1}{2}\ln|1+r| = t + \ln|C_1| \quad /\cdot(-2)$$

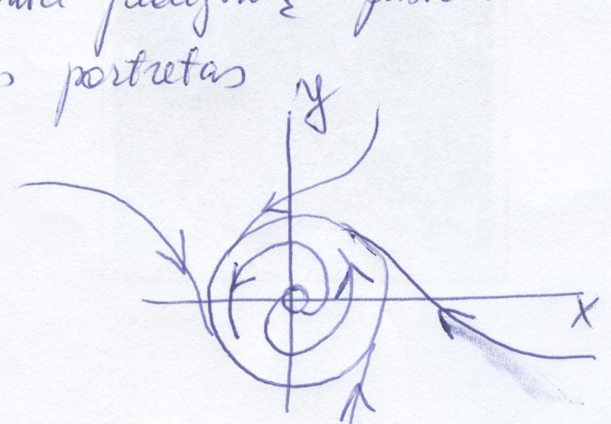
$$\ln\left|\frac{1-r^2}{r^2}\right| = -2t + \ln|\tilde{C}_1|$$

$$\frac{1}{r^2} - 1 = C_1 e^{-2t} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{1+C_1 e^{-2t}}.$$

$r \to 1$, kai $t \to \infty$.

$$\theta' = 1 \Rightarrow \theta = t + C_2$$

Ši lygtis išreiškia judėjimą pastoviu kampiniu greičiu. Todėl fazinis portretas



Galime užrašyti sprendinius kaip laiko t f-jas.

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t)$$

Matome, kad sprendinys artėja prie $x(t) = \cos(t+\theta_0)$, t.y. prie ribinio ciklo sprendinio.