Netiesinės antrosios eilės sistemos

Vektorinį lauką fazinėje pl-moje nustato sistema

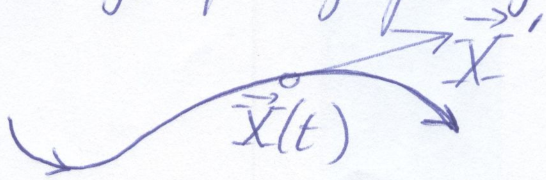
$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

f_1 ir f_2 – žinomos (netiesinės) f-jos

Vektorinė šios sistemos forma

$$\vec{x}\,' = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$\vec{x}$ žymi tašką fazinėje plokštumoje, o $\vec{x}\,'$ – greičio vektorių tame taške. Taškas juda plokštumoje sudarydamas sprendinį $\vec{x}(t)$ – trajektoriją fazinėje pl-moje.



Kadangi bet kuris pl-mos taškas gali būti kaip pradinė sąlyga, tai visa fazinė pl-ma užpildyta trajektorijomis.

Netiesinių sistemų atveju įprasta nekalbėti apie analizines sprendinių išraiškas. Net ir tuo atveju, kai jos gali būti rastos, sunku jas tyrinėti. Todėl domėsimės tik kokybiniu sprendinių elgesiu. Ieškosime fazinio portreto išstudijuodami $\vec{f}(\vec{x})$ savybes.

Tiriant fazinius portretus svarbu:

1) nustatyti ramybės taškus, kuriuose $\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{0}$. Jie išreiškia sistemos pusiausvyrą.

2) Rasti uždaras orbitas, kurios atitinka periodinių sprendinių atveju, t.y. $\vec{x}(t+T) = \vec{x}(t)$, $\forall t$ esant kokiam tikram $T > 0$.

3) Tirti trajektorijų išsidėstymą arti ramybės taškų ir orbitų.

4) Ištirti ramybės taškų ir uždarų orbitų stabilumą.

Fazinius portretus galima gauti sprendžiant netiesines sistemas skaitiniais metodais (kokybinė analizė)

Spręsti $\vec{X}' = \vec{f}(\vec{X})$ yra taip pat paprasta kaip ir vieną lygtį $x'(t) = f(x)$.

Runges–Kutos metodas vektorine forma:

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{X}_n + \frac{1}{6}\left(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4\right),$$

$$\vec{k}_1 = \vec{f}(\vec{X}_n)\Delta t,$$

$$\vec{K}_2 = \vec{f}\left(\vec{X}_n + \tfrac{1}{2}\vec{K}_1\right)\Delta t,$$

$$\vec{K}_3 = \vec{f}\left(\vec{X}_n + \tfrac{1}{2}\vec{K}_2\right)\Delta t,$$

$$\vec{K}_4 = \vec{f}\left(\vec{X}_n + \vec{K}_3\right)\Delta t.$$

Pakanka imti $\Delta t = 0,1$, kad išsivaizduotume vaizdą. Krypčių laukas yra labiau informatyvus.

Pvz.: Tirkime sistemą

$$\begin{cases} x' = x + e^{-y}, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Pirmiausia atlikime kokybinę analizę, tuomet kompiuteriu nubrėšime krypčių lauką, o po to R–K metodu rasime keletą trajektorijų ir nubrėšime fazinį portretą.

Surandame ramybės taškus

$$\begin{cases} x + e^{-y} = 0, \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x^*, y^*) = (-1, 0)$$

Kadangi $y' = -y$ sprendinys yra $y = y_0 e^{-t}$, o $t \to \infty$, tai $y(t) \to 0$. Tuomet atitinkamai $x' = x + 1$ $(e^{-y} \to 1)$

Šios lygties sprendiniai eksponentiškai auganačios kreivės. Jei pasirinksime pradinę sąlygą Ox ašyje, t.y. $y_0 = 0$, tai $y(t) = 0$ visą laiką. Tėkmė bus nustatoma $x' = x + 1$.

Tai reiškia, kad ramybės taškas yra nestabilus.

Norėdami nubrėžti fazinį portretą pradėkime nuo nulinių izoklinių, t.y. $\vec{C}=0$.
Nulinės izoklinės nustato, kur tiekmė yra tik vertikalioje arba tik horizontalioje kryptimi.

Horizontalioje kryptimi $y'=0$. Tai reiškia, kad $-y=0; y=0$. Šioje tiesėje tiekmė yra į dešinę, kai $x'>0$ ir į kairę, kai $x'<0$. $x'>0 \Rightarrow x+e^{-y}>0$, bet $y=0$, t.y. $x>-1$

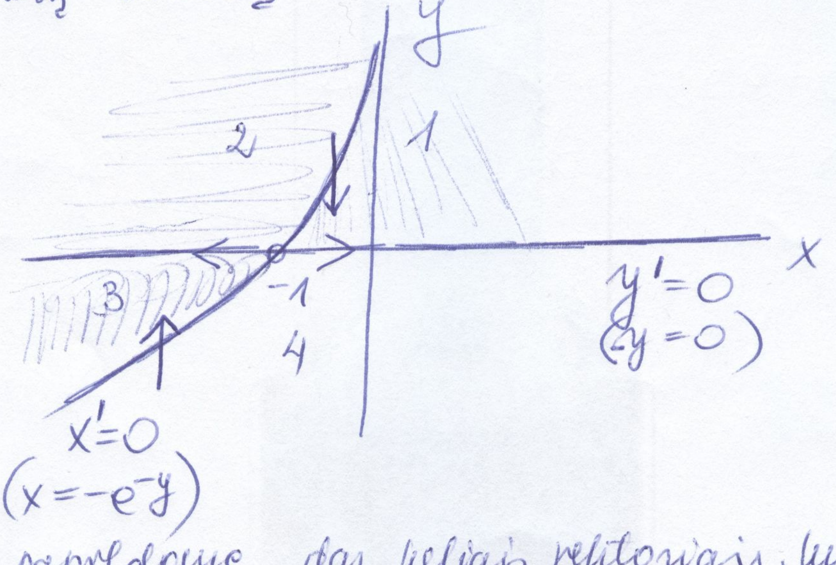
Vertikalioje kryptimi $x'=0$. Tuomet $x+e^{-y}=0$

$x=-e^{-y}$ kreivėje

$y'>0$, kai $-y>0$ arba $\underline{y<0}$, o

$y'<0$, kai $-y<0$ arba $\underline{y>0}$.

Turime tokį vaizdą



Grafiką papildome dar keliais vektoriais, kurie atsiranda tiriant x' ir y' ženklus nulinių izoklinių suformuotose fazinės pl-mos dalyse 1, 2, 3, 4 (skirtingai nuspalvintos dalys).

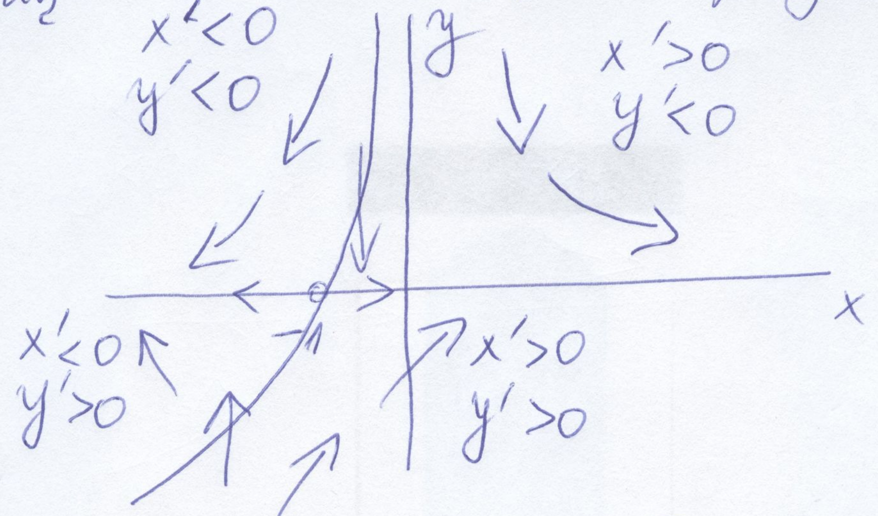
1 zonoje $x>-e^{-y}$, o $y>0$; todėl $x'=x+e^{-y}>0$, o
$y'=-y<0$

2 zonoje $x<-e^{-y}$, o $y>0$; todėl $x'=x+e^{-y}<0$, o
$y'=-y<0$

3 zonoje $x<-e^{-y}$, o $y<0$; todėl $x'<0$, $y'>0$

4 zonoje $x > -e^{y}$, o $y<0$; todėl $x'>0$, $y'>0$

Dabar fazinėje pl-moje galime pažymėti daugiau vektorių



Jau šiame faziniame portrete mes matome daug informacijos apie tėkmę.

Parenkame 4 pradines sąlygas kiekvienoje iš 4 nustatytų dalių ir su MATLAB nubrėžiame fazinį portretą su trajektorijomis.

Pvz.: MATLAB
DS_paskaita_4pav.m

Egzistavimo ir vienaties teorema

Mes tiriame fazinius portretus nežinodami, ar netiesinė sistema $\vec{X}' = \vec{f}(\vec{X})$ iš vis turi sprendinių.

Teorema. Pradinis uždavinys $\vec{X}(0)=\vec{X}_0$ netiesinei sistemai

$\vec{X}' = \vec{f}(\vec{X})$ turi vienintelį sprendinį, jei $\vec{f}$ yra tolydžioji ir $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j=1,2,\dots,n$ yra tolydžiosios, kai $\vec{X} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – atvira jungioji aibė.

$\vec{X}_0 \in D$ pradinis uždavinys turi sprendinį $\vec{X}(t)$ laiko intervale $(-\tau,\tau)$, $t=0$ (arti jo) ir sprendinys yra vienintelis.

Kitais žodžiais, sprendinio egzistavimą ir vienatį garantuoja f-os $\vec{f}$ tolygus diferencijuojamumas.

Ši teorema sako, kad skirtingos trajektorijos niekada nesusikerta.

Tai reiškia, kad tuo atveju, kai fazinėje pl-moje turime uždarą orbitą ir kuri nors trajektorija prasideda orbitos viduje, tai ten ji ir lieka visą laiką. Koks tolesnis trajektorijos likimas? Jei viduje yra ramybės taškų, tai bėgant laikui trajektorija gali pasiekti vieną iš jų. Tačiau kas bus tuo atveju, kai viduje nėra fiksuotų taškų (ramybės)

Puankare–Bendiksson teorema sako, kad šiuo atveju trajektorija galų gale turi pasiekti uždarą orbitą. Tokius atvejus nagrinėsime vėliau.

Ramybės taškai ir linearizacija

Nagrinėkime sistemą

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y). \end{cases}$$

Tarkime, kad (x^*, y^*) yra jos ramybės taškas, t.y.

$$f(x^*, y^*) = 0 \text{ ir } g(x^*, y^*) = 0.$$

Tegul $u = x - x^*$, $v = y - y^*$ išreiškia mažus ramybės taško sužadinimus.

Kaip elgiasi šie maži poslinkiai galime sužinoti nagrinėdami dif. lygtis, t.y. $u' = x'$;

$$u' = f(u + x^*, y^* + v)$$

Skleiskime f į Teiloro eilutę ramybės taško aplinkoje

$$u' = f(x^*, y^*) + u\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x^*,y^*)} + v\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x^*,y^*)} + O(u^2, v^2, uv)$$

Analogiškai

$$v' = g(x^*, y^*) + u\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x^*,y^*)} + v\frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(x^*,y^*)} + O(u^2, v^2, uv).$$

Gauname, kad mažų pokyčių dif. lygtis

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{|(x^*,y^*)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + O(u^2, v^2, uv).$$

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{|(x^*,y^*)}$$ vadiname Jakobio (Žordano)

matrica ramybės taškams (x^*, y^*).

Atmetę mažus skleidinio narius mes gauname linearizuotą sistemą:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$ kurios analizei skirta teorija, skirta tiesinių dinaminių sistemų tyrimui.

Netiesinių narių įtaka

Kvadratinių narių įtaka ramybės taškų aplinkoje nėra svarbi tik tam tikro laiko, t.y. tol, kol ramybės taškas nėra vienas iš ribinių linijų taškų (centras, dikritinis, išsigimęs mazgas, neizoliuotas ramybės taškas). Šiais atvejais svarbi netiesinių mažų narių įtaka.

Panagrinėkime pavyzdį:

Pvz. 1) $\begin{cases} x' = -x + x^3, \\ y' = -2y \end{cases}$

Raskime ramybės taškus. Linearizuodami sistemą nustatykime jų tipą. Tuomet patikrinsime gautą rezultatą nubrėždami pilnos netiesinės sistemos fazinį portretą.

$$\begin{cases} -x + x^3 = 0, \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(-1 + x^2) = 0, \\ -2y = 0 \end{cases}. \quad x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1, \quad y = 0.$$

Taigi, turime 3 ramybės taškus: $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$.

Žordano matrica šiai dinaminei sistemai yra: