Antrosios eilės dinaminės sistemos

Tiesinės sistemos

Antrosios eilės tiesinė sistema yra

$$x' = ax + by,$$
$$y' = cx + dy, \quad a, b, c, d - \text{parametrai}.$$

Matricinė sistemos forma
$$\vec{x}' = A\vec{x},$$
čia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Jei $\vec{X}_1$ ir $\vec{X}_2$ yra sprendiniai, tai ir $c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2$ - sprendinys, nes sistema - tiesinė.

Ji nusimet tuo ramybės tašką $\vec{X}^* = \vec{0}$ bet kuriai matricai A.

$\vec{X}' = A\vec{X}$ sprendinys - trajektorija (x, y) plokštumoje. Ta plokštuma vadinama fazine plokštuma.

Pvz.: Nagrinėkime prie spyruoklės pritvirtino kūno judėjimą, aprašomą dif. lygtimi
$$mx'' + kx = 0.$$
Tai - harmoninis osciliatorius.

Mes tokią dif. lygtį mokame spręsti ir žinome jos sprendinį:
$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right).$$
Tačiau tai mūsų jau nebedomina, nes daugeliu atvejų, ypač, kai lygtys netiesinės nes negalime surasti analizinio sprendinio. Todėl pasitelksime bendresnę teoriją, leidžiančią tirti sprendinio elgesį nesprendžiant dif. lygties.

Kadangi turime antrosios eilės dinaminę sistemą, tai norint nustatyti jos sprendinio elgesį reikia turėti papildomą informaciją apie judėjimą. Kiekvienu laiko momentu išreikia svarbi padėtis $x(t)$ ir judėjimo greitis $v(t)$.

Tuomet dif. lygtį galime pakeisti tokia sistema:

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -\frac{k}{m}x. \end{cases}$$

Pirmoji sistemos lygtis tik apibrėžia greitį, o antroji gaunama iš dif. lygties.

Pasirinkę, kad $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, sistemą perrašome taip:

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -\omega^2 x. \end{cases}$$

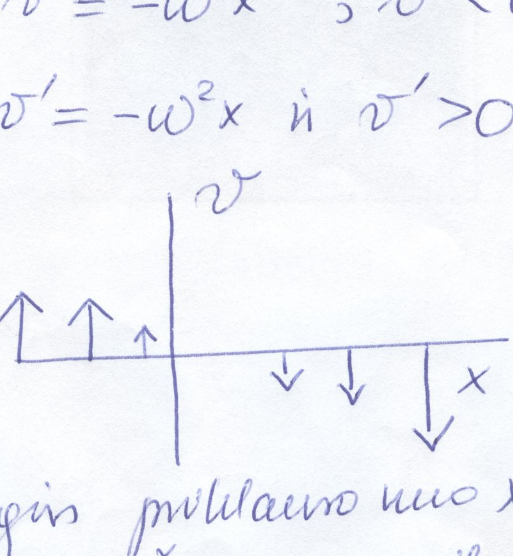
Ši sistema kiekvienam taškui (x, v) priskiria greitį $(x', v') = (v, -\omega^2 x)$ ir todėl sakome, kad turime vektorių lauką fazinėje plokštumoje.

Nagrinėkime šio uždavinio vektorių lauką x ir v ašyse, t.y.

1) $v = 0$, $(x', v') = (0, -\omega^2 x)$

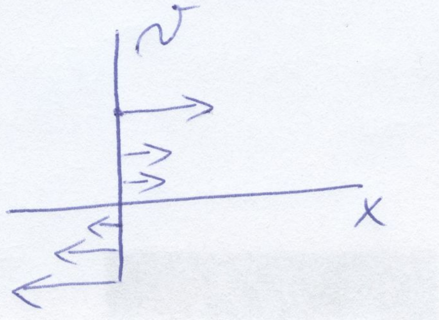
Kai $x > 0$, tai $v' = -\omega^2 x$, $v' < 0$

Kai $x < 0$, tai $v' = -\omega^2 x$ ir $v' > 0$

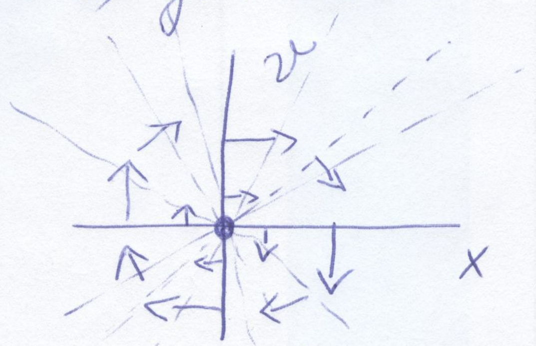


v' vektoriaus ilgis priklauso nuo x. Kuo didesnis (mažesnis) x, tuo didesnis (mažesnis) ir greičio vektoriaus ilgis.

2) $x=0$, $(x', v') = (v, 0)$



Sujungę 1) ir 2) gauname



izoklinės

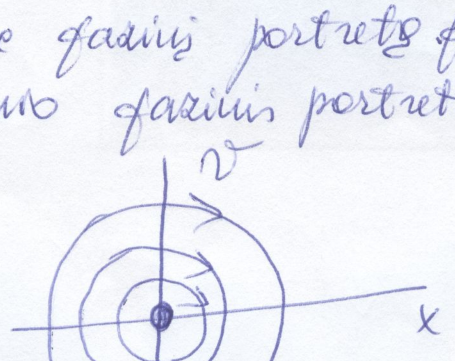
$$\frac{dv}{dx} = -\omega^2 \frac{x}{v}$$

tiesės, einančios per (0,0)

Brėžiant trajektoriją, kuri prasideda taške (x_0, y_0) mes pažymime tą tašką fazinėje pl-moje ir stebime kaip jis juda ratu toje tėkmėje.

Kaip matyti mūsų atveju tėkmė sukasi apie koordinačių pradžios tašką. Šiame taške judėjimo nėra, t.y. $(x', v') = (0,0)$, kai $(x, v) = (0,0)$. Jis – ramybės taškas. Tačiau bet kuris kitas taškas juda aplink šį ramybės tašką ratu ir sugrįžta į savo pradinę padėtį. Tokios trajektorijos sudaro uždaras orbitas. Gauname fazinį portretą fazinėje erdvėje.

Mūsų uždavinio fazinis portretas



Ką šios orbitos ir ramybės taškas pasako apie mūsų nagrinėjamo prie spyruoklės pritvirtinto kūno judėjimą?

Ramybės taškas $(x, v) = (0,0)$ nurodo pusiausvyrą, kai spyruoklis kūnas nejuda ir visą laiką išlieka pusiausvyros taške. Uždaros orbitos atitinka periodinį judėjimą, t.y. osciliacijas. Patyrinėkime šias orbitas.

Kai pagal x esame kairiausiame taške, tai matome, kad greitis $v=0$. Tai atitinka atvejį, kai spyruoklė yra maksimaliai suspausta. Kai x ima didėti, tai greitis tampa teigiamas ir spyruoklė tempiasi (kūnas juda link pusiausvyros padėties). Tuo laiko momentu, kai kūnas pasiekia pusiausvyros padėtį $x=0$, jo greitis yra pats didžiausias (teigiamas) ir kūnas praeina pusiausvyros padėtį.

Kai x yra maksimaliai dešinėje, pasiekiame kitą ribinę padėtį, kurioje spyruoklė yra maksimaliai ištempta ($v=0$).

Kai x ima mažėti, tai greitis tampa neigiamas ir vėl judėjimas nukreipiamas į pusiausvyros padėtį ir t.t.

Grįžkime prie orbitų lygties

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -\frac{k}{m}x. \end{cases}$$

Sistemą pakeičiame viena dif. lygtimi

$$\frac{dx}{dv} = \frac{v}{-\frac{k}{m}x}$$ ir integruodami gauname

$$-\frac{k}{m}x\,dx = v\,dv$$

$$-\omega^2\frac{x^2}{2} = \frac{v^2}{2} + C$$

arba

$$\underline{v^2 + \omega^2 x^2 = C} \quad , C \geq 0.$$

Tai – elipsės lygtis. Vadinasi, orbitos yra elipsės formos.

Ši elipsės lygtis išreiškia energijos tvermės dėsnį:

$$\frac{mv^2}{2}+mgh=C$$

$$mg=kx$$

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{kx}{2}\cdot x=C$$

$$\frac{v^2}{2}+\frac{w^2}{2}x^2=C$$

$$v^2+\cancel{2}w^2x^2=C.$$

Pvz.: Nagrinėkime sistemą

$$\vec{X}'=A\vec{X},\quad A=\begin{pmatrix}a&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

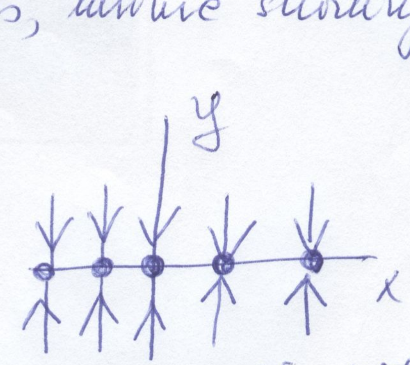
$$\begin{cases}x'=ax,\\y'=-y.\end{cases}$$

Kiekviena šių lygčių gali būti išspręsta atskirai. Gauname sprendinius:

$$\begin{cases}x(t)=x_0e^{at},\\y(t)=y_0e^{-t}.\end{cases}\qquad x^*=0,\ y^*=0$$

Esant skirtingoms a reikšmėms, gausime skirtingus fazinius portretus.

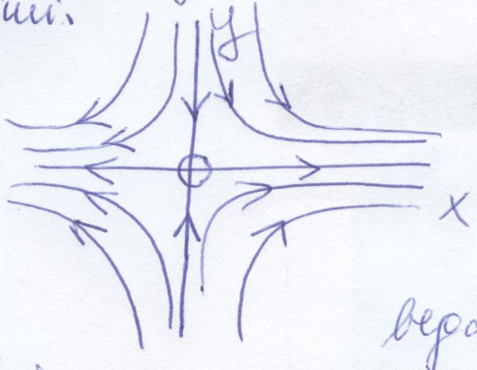
1) $a=0$, $\begin{cases}x(t)=\cancel{0}\,x_0,\\y(t)=y_0e^{-t}\end{cases}$



Kiekviename Ox ašies taške turime ramybės tašką, t.y. turime ramybės taškų tiesę. Kiekviena trajektorija artėja į ramybės tašką vertikaliai.

2) $a>0$ $\begin{cases} x(t) = x_0 e^{at}, \\ y(t) = y_0 e^{-t}. \end{cases}$

Ramybės taškas yra nestabilus dėl eksponentinio augimo x ašies kryptimi.



Ramybės taškas $(0,0)$ vadinamas balnu. Dauguma trajektorijų nutolsta nuo $(0,0)$ ir artėja į begalybę pagal x.

Tačiau tais atvejais, kai trajektorijos prasideda ašies Oy taškuose jos juda artyn link ramybės taško. Oy ašis vadinama stabilizija balno taško separatrise.

3) $a<-1$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{at}, \\ y(t) = y_0 e^{-t}. \end{cases}$$

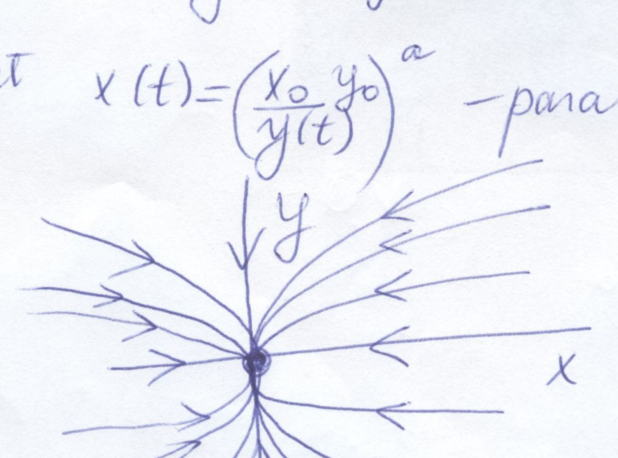
Šiuo atveju $x(t)$ mažėja daug greičiau, nei $y(t)$.

Ramybės taškas yra stabilusis. Jis vadinamas stabiliuoju mazgu.

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{x_0}{y_0}\right) \cdot e^{(a+1)t}$$

Iš sprendinių $y(t) = y_0 e^{t} \Rightarrow e^{t} = \frac{y_0}{y(t)}$

Tuomet $x(t) = \left(\frac{x_0 y_0}{y(t)}\right)^{a}$ – parabolės.

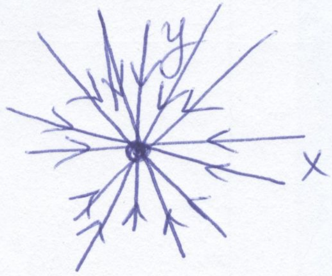


4) $a=-1$.

Tuomet
$$\begin{cases} x(t)=x_0 e^{-t}, \\ y(t)=y_0 e^{-t}, \end{cases}$$ o iš čia $e^{-t}=\dfrac{y(t)}{y_0}$ ir

$$x(t)=x_0\frac{y(t)}{y_0} \Rightarrow y(t)=\frac{y_0}{x_0}x(t)$$ – tiesės yra dif. sistemos trajektorijos fazinėje pl-moje.

Taip nutinka todėl, kad $x(t)$ ir $y(t)$ mažėja tuo pačiu greičiu. Ramybės taškas šiuo atveju vadinamas simetriniu mazgu, žvaigžde arba dikritiniu stabiliuoju mazgu.



5) $-1<a<0$

Sprendiniai šiuo atveju yra
$$\begin{cases} x(t)=x_0 e^{at}, \\ y(t)=y_0 e^{-t}. \end{cases}$$

Šiuo atveju mažėjimas (gesimas) $x(t)$ kryptimi yra lėtesnis, todėl turime paraboles, simetrines Ox ašies atžvilgiu. Ramybės taškas ir šiuo atveju yra stabilusis. Stabilusis mazgas.