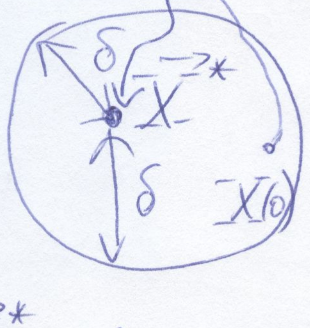
Stabilumas

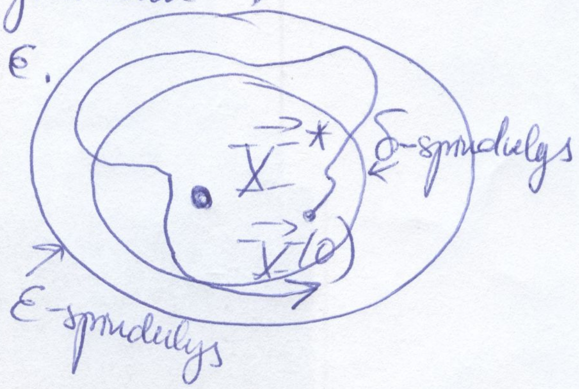
Nagrinėkime dinaminės sistemos $\vec{X}' = \vec{f}(\vec{X})$ stabilumo (ramybės) tašką $\vec{X}^*$.

Ap. Sakome, kad $\vec{X}^*$ yra pritraukiantis, jei $\exists \delta > 0 : \lim\limits_{t \to \infty} \vec{X}(t) = \vec{X}^*$, kai $\|\vec{X}(0) - \vec{X}^*\| < \delta$. Kitaip sakant, kiekviena trajektorija, kuri prasideda δ atstumu nuo ramybės taško konverguoja į $\vec{X}^*$.



T. y. trajektorijos trumpais laiko intervalais gali nutolti nuo $\vec{X}^*$, tačiau ilgu laiko intervalu (riboje) artėja prie jo.

Ap. $\vec{X}^*$ vadinamas stabiliuoju Liapunovo prasme, jei $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \|\vec{X}(t) - \vec{X}^*\| < \epsilon$, $t \geq 0$ ir $\|\vec{X}(0) - \vec{X}^*\| < \delta$. Kitaip sakant, trajektorijos, kurios prasideda δ atstumu nuo $\vec{X}^*$ bet kuriam teigiamam t išlieka nutolusios nuo $\vec{X}^*$ ne daugiau kaip per ϵ.



Ap. $\vec{X}^*$ yra asimptotiškai stabilus, jei jis yra pritraukiantis ir stabilus Liapunovo prasme.

Tiesinių dinaminių sistemų klasifikacija

Ankstesniajame pavyzdyje nagrinėjome dinaminę sistemą, kuri turėjo 2 nežinomus koeficientus ir priklausė nuo a. Dabar panagrinėkime bendresnį atvejį.

Kaip matome pavyzdyje, kad tuo atveju, kai trajektorijos pradžia yra kurioje nors iš ašių, tai trajektorijos ir lieka ašyje ir stebime tik gęstimą arba augimą toje ašyje.

Kaip ir tiesinių homogeninių dif. lygčių atveju, sprendinių ieškome pavidalu

$$\vec{X}(t) = e^{\lambda t}\vec{V},$$ čia $\vec{V}$ - konstantų vektorius, (tikrinis vektorius)

λ - konstanta, (augimo(gęstimo) greitis) $\vec{V} \neq \vec{O}$.

Jei tokie sprendiniai egzistuoja, tai jie vaizduoja būtent eksponentinį judėjimą ašimi.

Norėdami nustatyti λ ir $\vec{V}$ sprendinio išraišką įrašome į bendro pavidalo antrosios eilės tiesinę dinaminę sistemą:

$$\vec{X}' = A\vec{X}$$

Turime:

$$\lambda e^{\lambda t}\vec{V} = A e^{\lambda t}\vec{V}$$

arba

$$A\vec{V} = \lambda\vec{V}$$ - tikrinių reikšmių nustatymo uždavinys matricai A.

λ - matricos A tikrinės reikšmės, $\vec{V}$ - matricos A tikriniai vektoriai. Kaip žinome, matricos A tikrinės reikšmės yra nustatomos iš charakteringosios lygties

$$\underline{\det(A - \lambda I) = 0},$$ I - vienetinė matrica.

Sakykime, kad $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Šios matricos charakteringoji lygtis yra

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ arba

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

Čia $a+d$ – matricos A pėdsakas, o
(τ)

$ad-bc$ – matricos A determinantas.
(Δ)

Todėl charakteringoji lygtis gali būti užrašyta taip:

$$\lambda^2-\tau\lambda+\Delta=0. \quad (*)$$

Šios lygties šaknys

$$\lambda_{1,2}=\frac{\tau\pm\sqrt{\tau^2-4\Delta}}{2}$$ yra matricos A tikrinės reikšmės.
$(**)$

Tuo atveju, kai $\lambda_1\neq\lambda_2$, tai turime du tiesiškai nepriklausomus tikrinius vektorius, atitinkančius šias tikrines reikšmes, t.y. $\vec{V}_1$ ir $\vec{V}_2$.

Tuomet bet kuri pradinė sąlyga gali būti užrašyti kaip šių vektorių tiesinė kombinacija, t.y.:

$$\vec{X}_0=c_1\vec{V}_1+c_2\vec{V}_2.$$

Tuomet bendrasis sprendinys:

$$\vec{X}(t)=e^{\lambda_1 t}c_1\vec{V}_1+e^{\lambda_2 t}c_2\vec{V}_2.$$

Taip yra todėl, kad $\vec{X}(t)$ yra tiesinių lygčių sistemos $\vec{X}'=A\vec{X}$ sprendinių tiesinė kombinacija ir $\vec{X}(t)$ tenkina pradinę sąlygą.

Grįžkime prie $(*)$ ir $(**)$. Pagal Vieto teoremą:

$$\lambda_1+\lambda_2=\tau, \quad \lambda_1\lambda_2=\Delta.$$

I. Jei $\Delta<0$, tai $\lambda_1\lambda_2<0$, $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. Tokiu atveju ramybės taškas vadinamas balnu. $(D>0)$

II. Jei $\Delta>0$, tai $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ ir yra to paties ženklo arba λ_1 ir λ_2 yra kompleksiniai jungtiniai.

Kurį atvejį gauname priklausomai nuo diskriminanto ženklo.

1) $D>0$, $\tau^2-4\Delta>0$ – realiosios to paties ženklo šaknys (mazgai) ramybės taškai.
$\Delta>0$

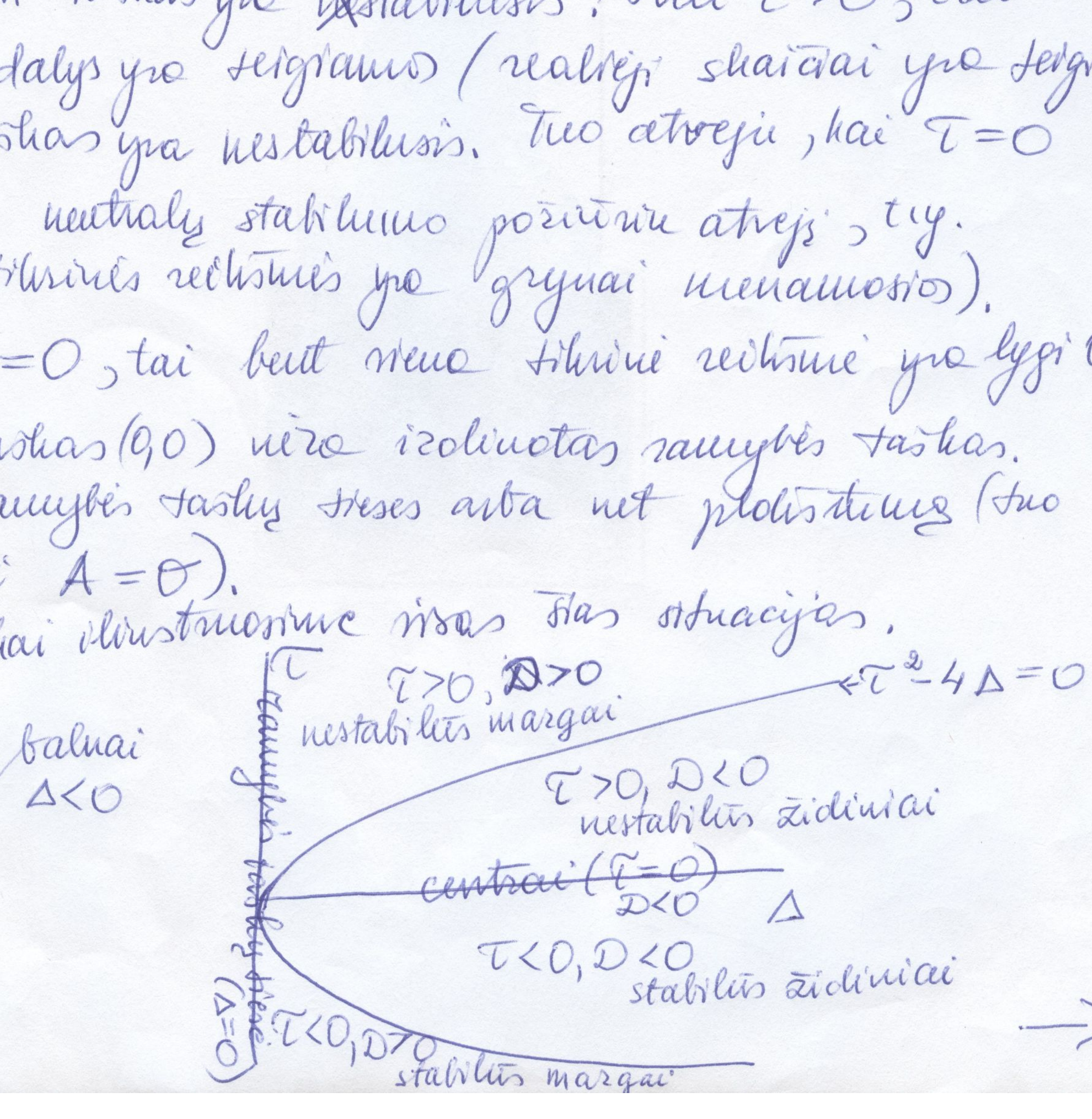
2) $D<0$, $\tau^2-4\Delta<0$ – $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, tai ramybės taškai yra židiniai arba centrai.
$\Delta>0$

3) $D=0$, $\tau^2-4\Delta=0$ parabolė, kuri skiria centrus nuo židinių. Šiuo atveju charakteringosios lygties šaknys yra lygios, t.y. mes turime ramybės taškus, kurie vadinami išsigimusiais mazgais arba dikritiniais mazgais.

Stabilumą lemia τ ženklas. Kai $\tau<0$, tai realiosios dalys yra neigiamos (realieji skaičiai yra neigiami) ir taškas yra ~~ne~~stabilusis. Kai $\tau>0$, tai realiosios dalys yra teigiamos (realieji skaičiai yra teigiamieji) ir taškas yra nestabilusis. Tuo atveju, kai $\tau=0$ mes turime neutralų stabilumo požiūriu atvejį, t.y. centrą (tikrinės reikšmės yra grynai menamosios).

III. Jei $\Delta=0$, tai bent viena tikrinė reikšmė yra lygi 0. Tuomet taškas $(0,0)$ nėra izoliuotas ramybės taškas. Turime ramybės taškų tieses arba net plokštumą (tuo atveju, kai $A=\Theta$).

Grafiškai iliustruosime visas šias situacijas.



$\longrightarrow$

Ribinių linijų sritelės taškai vadinami:
centrai, išsigimę mazgai, dikritiniai mazgai, neizoliuotieji ramybės taškai.

Balno atveju t. vektoriai nustato ašis (stabiliųjį ašis neig. t. reikšmių atotinkamos t. vektoriaus nustatome ašis)

Mazgo atveju lėstinę nustato t. vektorius, atotinkantis moduliu mažiausią t. reikšmę.