Meilės modeliai

Tokį modelį pasiūlė Strogatz 1988.
Situacija tokia:
Romeo myli Džuljetą, bet ji meilėje nėra pastovi. Kuo labiau Romeo myli Džuljetą, tuo labiau ji nori nuo jo pabėgti. Tačiau kai Romeo tiek atvėsta, tai Džuljeta pamė ižvelgia tai, kas jį traukia. Romeo atsiliepia: jis sau tyliai atgyja, kai Džuljeta jį myli ir vėsta, kai Džuljeta tolsta nuo jo.
Tarkime, kad

$R(t)$ – Romeo meilė (neapykanta) Džuljetai laiko momentu t,

$D(t)$ – Džuljetos meilė (neapykanta) Romeo laiko momentu t.

Kai $R(t), D(t) > 0$, tai atspindi meilę, o kai $R(t) < 0$ ar $D(t) < 0$ – neapykantą. Turime meilės modelis

$$\begin{cases} R' = aD, \\ D' = -bR, \end{cases}$$

čia a ir $b > 0$ pagal aprašytą istoriją.

Šios istorijos rezultatas – nikada nesibaigiantis meilės ciklas. Kodėl? Šios sistemos ramybės taškas $(R^*, D^*) = (0,0)$ yra centras.

$$\frac{dR^*}{dD^*} = \frac{aD}{-bR} \Rightarrow -b\frac{R^2}{2} = a\frac{D^2}{2} + C$$

$$a\frac{D^2}{2} + b\frac{R^2}{2} = C$$

Abudu įsimylėjėliai vienas kitą myli tik viename ketvirtyje (pirmajame ketv. $R > 0, D > 0$), o kitais atvejais abipusės meilės nėra.

Galime nagrinėti kiek sudėtingesnį meilės modelį

$$\begin{cases} R' = aR + bD, \\ D' = cR + dD, \end{cases}$$

čia a, b, c, d gali būti bet kurio ženklo. Koeficientų parinkimas leidžia nagrinėti skirtingas meilės situacijas (schemas).

Pvz.: Kasmetinės tolydžioje sistemoje, kai $a=d$, o $b=c$, $a<0$, $b>0$.

a – atsargumo matas, o b – reakcijos matas.

$$\begin{cases} R' = aR + bD, \\ D' = bR + aD. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \tau = 2a, \quad \Delta = a^2 - b^2,$$

$$\tau^2 - 4\Delta = 4a^2 - 4a^2 + 4b^2 = 4b^2 > 0$$

Kadangi $D > 0$, tai rezultatas priklauso nuo Δ:

1) $\Delta > 0$, kai $a^2 > b^2$ arba $|a| > |b|$

Rezultatai yra mazgai. Jei $a > 0$, tai ~~ne~~stabilūs, o jei $a < 0$, ~~ne~~stabilūs.

2) $\Delta < 0$, tai $a^2 < b^2$ arba $|a| < |b|$

Bet kuriuo atveju, ramybės taškai – balnai.

Atlikome visų atvejų analizę $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Mūsų uždavinio atveju, $a < 0$, tai

Mazgas $(0,0)$ ~~ne~~stabilus, kai $\Delta > 0$ ir $a^2 > b^2$, o kai $\Delta < 0$, tai turime balną taške $(0,0)$, o $a^2 < b^2$.

Tikrinės reikšmės:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

$\lambda_{1,2} = a \pm |b|$, bet $b > 0$, tai $\lambda_1 = a + b$, $\lambda_2 = a - b$.

Tikrinį reikšmę λ_1 atitinkantį tikrinį vektorių surandame spręsdami TLS:

$$A\vec{V_1} = \lambda_1 \vec{V_1}$$

$$(A - \lambda_1 I)\vec{V_1} = \vec{O}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - (a+b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\vec{V_1} = \vec{O}$$

$$\begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix}\vec{V_1} = \vec{O}$$

$$\begin{cases} -b v_1 + b v_2 = 0, \\ b v_1 - b v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 \text{ , pvz.: } v_1 = v_2 = 1$$

$$\vec{V_1} = (1, 1)$$

$\lambda_2 = a - b$, Ieškome $\vec{V_2}$:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\vec{V_2} = \vec{O}$$

$$\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}\vec{V_2} = \vec{O} \Rightarrow \begin{cases} b v_1 + b v_2 = 0, \\ b v_1 + b v_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow v_1 = -v_2$$

pvz.: $v_1 = 1$, $v_2 = -1$

$$\vec{V_2} = (1, -1).$$

Tuomet galime parašyti nagrinėjamos sistemos bendrąjį sprendinį:

$$\vec{X} = e^{\lambda_1 t} c_1 \vec{V_1} + e^{\lambda_2 t} c_2 \vec{V_2}$$

$$\vec{X} = e^{(a+b)t} c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{(a-b)t} c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

arba

$$\begin{cases} R(t) = c_1 e^{(a+b)t} + c_2 e^{(a-b)t}, \\ D(t) = c_1 e^{(a+b)t} - c_2 e^{(a-b)t}. \end{cases}$$

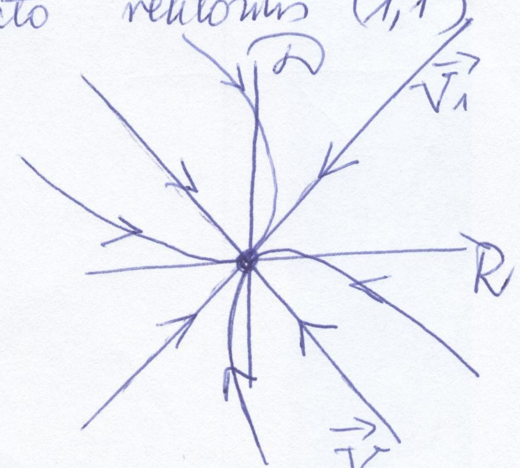
Brėžiame fazinį portretą.

Tikriniai vektoriai nustato balno arba mazgo orientaciją. Mazgo atveju integralinės kreivės liečia vektorių, atitinkantį moduliu mažiausiąją tikrinę reikšmę. Balno atveju tikriniai vektoriai nustato ašis (stabilioji ašis yra t. vektoriaus, atitinkančio neig. t. reikšmę nustatoma ašis)

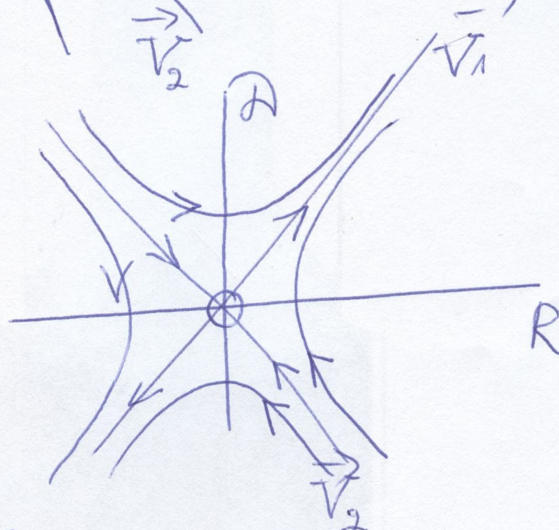
Mūsų uždavinyje mažiausioji tikrinė reikšmė yra $|a+b|$, $a<0$, $b>0$.

Tokiu būdu integralinės kreivės turi liestines, kurių kryptis nustato vektorius (1,1)

$a^2 > b^2$ mazgas



$a^2 < b^2$ balnas



Vadinasi, kai $a^2 > b^2$, tai santykiai visuomet artėja prie abipusio abejingumo (ramybės taškas (0,0)).

Kai $a^2 < b^2$, įsimylėjėliai yra labiau drąsūs ar labiau jautrūs vienas kitam. Tada santykiai yra sprogstantys. Priklausomai nuo jausmų pradiniu laiko momentu, gali būti pasiekta arba abipusė meilė arba neapykanta. Bet kuriuo atveju visos trajektorijos artėja prie tiesės $D = R$, t.y. prie abipusės meilės arba abipusės neapykantos.