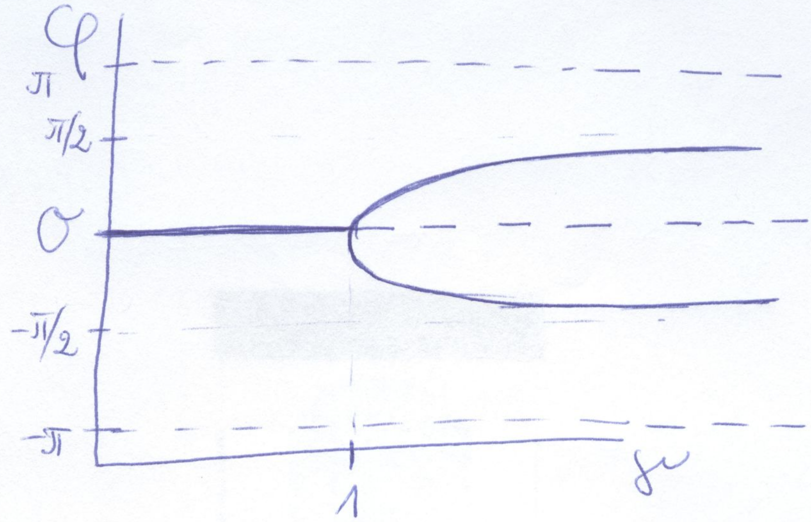
Brėžiame bifurkacinę diagramą



Kai $\gamma = 1$ matome superkritinę pitčforko bifurkaciją.

Kai $\gamma < 1$, tai lankas sukasi lėtai (ω-mažas) ir išcentrinė jėga nesubalansuoja jo (nesutrukdo gravitacinės jėgos). Todėl karoliukas nuslenka žemyn ir lieka ten.

Kai $\gamma > 1$, tai lankas sukasi gana greitai ir to pakanka, kad lanko apačia taptų nestabili. Augant išcentrinei jėgai karoliukas juda aukštyn ir judėjimas yra šis sustyprinamas kol gravitacijos jėga nesubalansuoja (neatsveria) išcentrinės jėgos. Tuomet yra pasiekiamas vienas iš dviejų stabiliųjų rimties taškų $\varphi^* = \pm \arccos\left(\frac{g}{r\omega^2}\right)$. Kuris jų bus pasiektas lemia ~~nuo~~ pradinis polinkis.

Kaip matome problema yra simetrinė, o tai ir yra būdinga pitčforko bifurkacijai.

<u>Netobulos bifurkacijos ~~ir katastrofos~~</u>

Iki šiol nagrinėjome bifurkacijas sistemose, kurios yra simetrinės. Tačiau realiuose uždaviniuose simetrija tėra tik aproksimacija, o netobulumas yra tas, kad kairė ir dešinė pusės yra skirtingos. ~~[illegible]~~ Pažiūrėkime kas nutinka dėl minėto netobulumo.

Nagrinėkime dinaminę sistemą

$$x' = h + r x - x^3.$$

Jei $h = 0$, tai turime superkritinės pitčforko bifurkacijos normaliąją formą. Tačiau simetrija prarandama, kai $h \neq 0$. Todėl būdu h – netobulumo parametras.

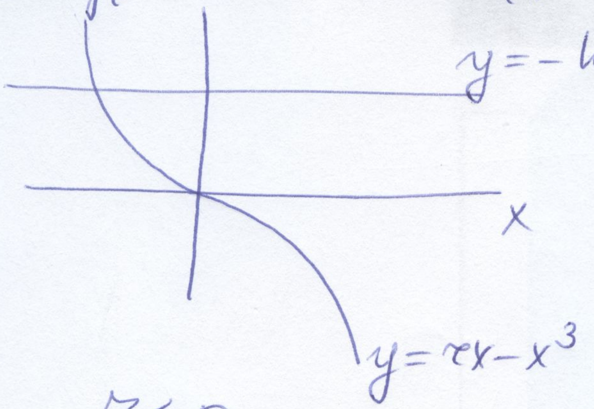
Kadangi naujasis uždavinys turi du parametrus r ir h, tai jis yra komplikuotas.

Apsiribokime analize laikydami, kad r – fiksuotas.

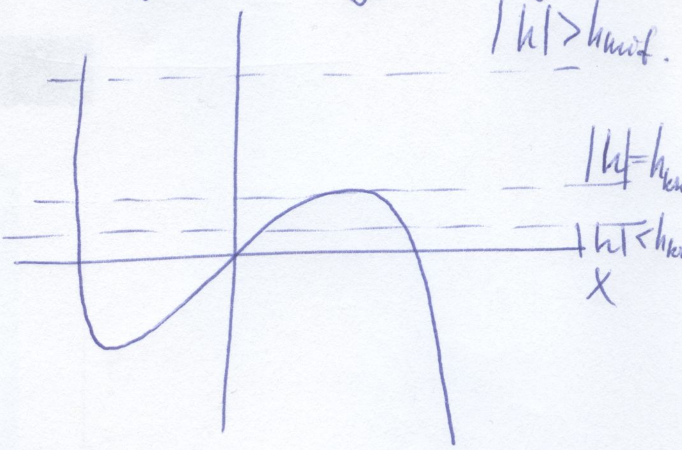
Ieškome ramybės taškų, t.y.

$$h + rx - x^3 = 0.$$

Jie gali būti surasti ir naudojant tikslias f-les, tačiau mes parodyksime grafiniu būdu. Brėžiame du grafikus: $y = -h$ ir $y = rx - x^3$ ir ieškome jų susikirtimo taškų.



$r \leq 0$



$r > 0$

Kritinį atvejį turime, kai $|h| = h_{krit.}$, t.y. kai gauname grafiko lokalinio max ar lokalinio min liestinę. Šiuo atveju turime balno–mazgo bifurkaciją. Norėdami surasti h reikšmes, kuriomis stebime šią bifurkaciją randame f-jos $y = rx - x^3$ ekstremumus:

$$y' = r - 3x^2, \quad r - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{r}{3}}$$

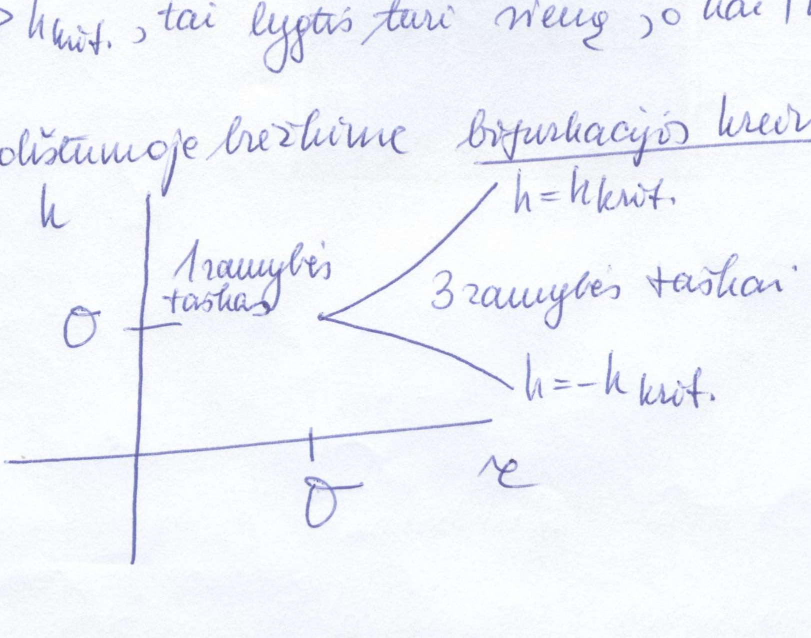
$$y_{max} = r\sqrt{\frac{r}{3}} - \left(\sqrt{\frac{r}{3}}\right)^3 = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}}, \quad \text{o} \quad y_{min} = -\frac{2}{3}r\sqrt{\frac{r}{3}}.$$

Tokiu būdu balno mazgo bifurkacijos stebimos, kai

$$h_{krit.} = \pm\frac{2}{3}r\sqrt{\frac{r}{3}}.$$

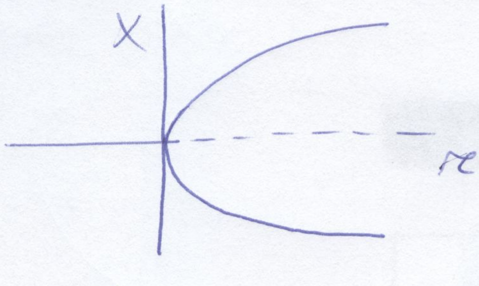
Kai $|h| > h_{krit.}$, tai lygtis turi vieną, o kai $|h| < h_{krit.}$ – 3 ramybės taškus.

(r, h) plokštumoje brėžkime bifurkacijos kreives $h = h_{krit.}$

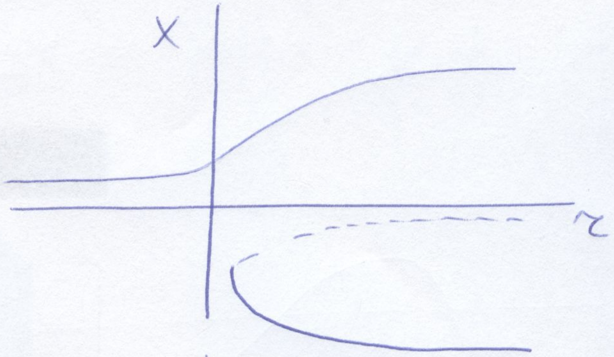


Bifurkacinės kreivės smailė taške $(0,0)$. Balno-mazgo bifurkacijos slenksčio kontūro taškuose išskyrus tašką $(0,0)$, kuris priklauso iš karto ir nuo r.

Fiksuotam h mes turime



$h=0$

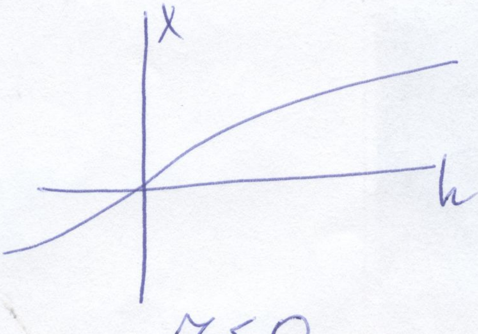


$h\neq 0$.

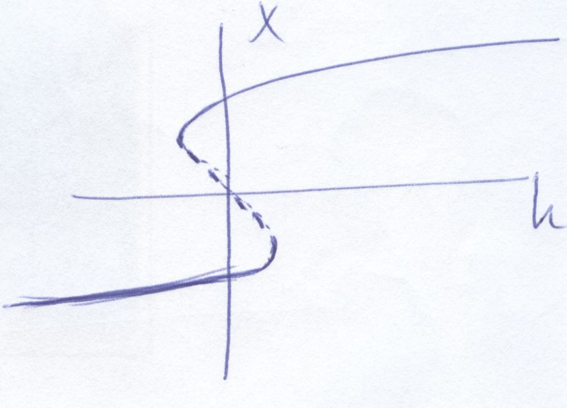
Kai $h=0$, tai turime įprastinę pitčforko bifurkaciją.

Kai $h\neq 0$, tai pitčforko bifurkacinė diagrama išsiskiria į dvi dalis. Viršutinę dalį sudaro stabilieji ramybės taškai, kai tuo tarpu apatinę dalį sudaro stabilioji ir nestabilioji šakos.
Šiuo atveju didinant r (pradedame nuo neig. reikšmių) nėra staigaus perėjimo taške $r=0$, t.y. ramybės taškas tolygiai juda viršutine kreive. Apatinė stabiliųjų taškų šaka yra nepasiekiama kol nedarome gana didelių sistemos sutrikdymų.

Fiksuotam r mes turime



$r\leq 0$



$r>0$

Kai $r\leq 0$, tai $\forall h$ turime tik vieną stabilųjį ramybės tašką.
Kai $r>0$, o $|h|<h_{krit.}$ mes turime 3 ramybės taškus: dvi stabilias šakas ir nestabilųjį viduryje.

Vektorinis laukas apskritime
(Tėkmės apskritime)

Nagrinėdami vektorinį lauką nustypčme dinamines sistemas, kurios negali osciliuoti, t.y. niekada nesugrįžta į tą patį tašką. Dabar nagrinėsime dinamines sistemas

$\Theta' = f(\Theta)$, kurių vektorinį lauką vaizduosime apskritime, t.y. Θ yra apskritimo taškas, o Θ' yra greičio vektorius tame taške, kuris nustatomas pagal taisyklę $\Theta' = f(\Theta)$. Taigi dabar galime turėti ir periodinių sprendinių.

Pradžioje nagrinėsime paprastus osciliatorius, o vėliau pateiksime taikymus.

Pvz.: 1) Apskritime pavaizduosime dinaminės sistemos

$\Theta' = \sin\Theta$ vektorinį lauką.

Koordinatės apskritime įvedamos sprendžiant trauke atidedant kampus Θ.

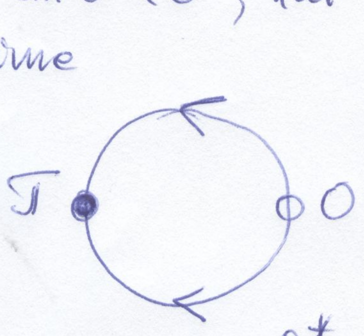
Surandame ramybės taškus, t.y. $\sin\Theta = 0$

$\Theta^* = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\sin\Theta > 0$, kai $\Theta \in (0, \pi)$, o

$\sin\Theta < 0$, kai $\Theta \in (\pi, 2\pi)$.

Turime



Vadinasi, taškas $\Theta^* = \pi$ yra stabilusis, o $\Theta^* = 0$ – nestabilusis.

2) Tačiau, pvz., dinaminės sistemos $\Theta' = \Theta$ vektorinis laukas negali būti pavaizduotas apskritime, nes du taškai $\Theta = 0$ ir $\Theta = 2\pi$ yra toje pačioje vietoje. Vienas iš jų ramybės taškas, o kitas – ne (kai $\Theta = 2\pi$, tai greitis $\Theta' = 2\pi$).

Vektorinis laukas apskritime – tai taisyklė, pagal kurią kiekvienam apskritimo taškui priskiriame vienintelę greičio vekt. reikšmę.

Praktikoje tokią situaciją turime, kai nagrinėjame pirmosios eilės dinamines sistemas $\theta' = f(\theta)$, kuriose $f(\theta)$ yra realaus argumento periodinė f-ja, kurios periodas 2π. Taip pat laikome, kad $f(\theta)$ yra tolydi f-ja, kad būtų užtikrintos egzistavimo ir vienaties teoremos sąlygos. Tačiau vektorinis laukas apskritime yra atskiras vektorinio lauko tiesėje atvejis.

Tolygieji osciliatoriai

Taškas ant apskritimo θ vadinamas kampu arba faze.
Kai jis kinta tolygiai, tai turime paprasčiausią osciliatorių

$$\theta' = \omega \quad , \omega\text{-konstanta}$$

Tuomet $\theta = \omega t + \theta_0$ - sprendinys, kuris išreiškia tolygų judėjimą apskritimu kampiniu greičiu ω. Šis sprendinys periodinis, kurio periodas $T = \frac{2\pi}{\omega}$. T - osciliavimo periodas.
Šiame osciliatoriuje nėra amplitudės. Jei būtų amplitudė, tai turėtume antrosios eilės sistemą.

Pvz.: Du bėgikai A ir B bėga apskritimu. tuo pačiu tempu A bėgikas vieną ratą apibėga per T_1 sekundes, o B per T_2, $T_2 > T_1$.
Suprantama, kad bėgikas A periodiškai pasivejа bėgiką B. Kiek laiko tunka nuo starto iki pirmo pasivijimo?

θ_1 - bėgiko A padėtis ant apskritimo, o θ_2 - B.

$\theta_1' = \omega_1$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$. Analogiškai $\theta_2' = \omega_2$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$.

A pasivys B (pralenkęs jį vienu ratu), kai skirtumas tarp θ_1 ir θ_2 bus lygus 2π, t.y.

$$(\omega_1 - \omega_2)t = 2\pi \quad (\theta_1 = \omega_1 t + \theta_0, \theta_2 = \omega_2 t + \theta_0)$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_1} - \frac{2\pi}{T_2}} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}$$

Tokia situaciją vadiname „mušimu." Du nesąveikaujantys osciliatoriai osciliuoja skirtingais dažniais, bet kartais mo kartojų fazės sutampa. Pvz., kelių bažnyčių varpų skambesys ir pan.

Netolygieji osciliatoriai

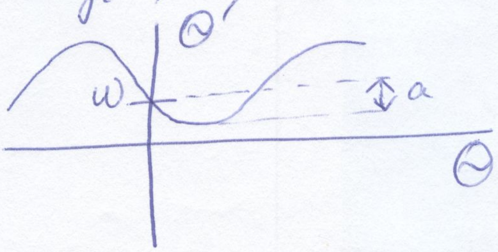
Mokslo ir inžinerijos uždaviniuose sutinkame dif. lygtis

$$\Theta' = \omega - a \sin \Theta$$

Pvz. biologijoje: žmogaus budrumo ir miego fazės, neuronų osciliacijos,

medžiagų fizikoje: krintančio tankio bangos.

Nagrinėkime atvejį, kai $\omega > 0$ ir $a \geq 0$.



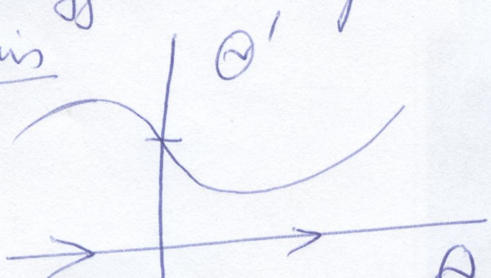
ω – dažnis,
a – amplitudė

Kai $a=0$, tai turime tolygųjį osciliatorių. Svyravimo netolygumą lemia $a>0$.

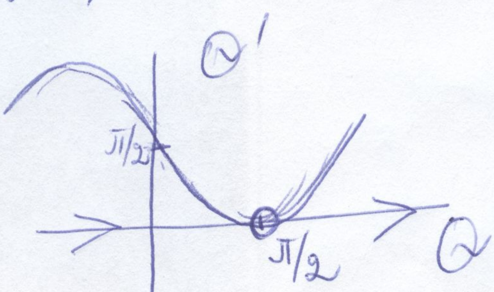
Greičiausia tėkmė yra taške $\Theta = -\frac{\pi}{2}$, o lėčiausia $\Theta = \frac{\pi}{2}$.

Šis netolygumas tampa itin ryškus, kai didiname a

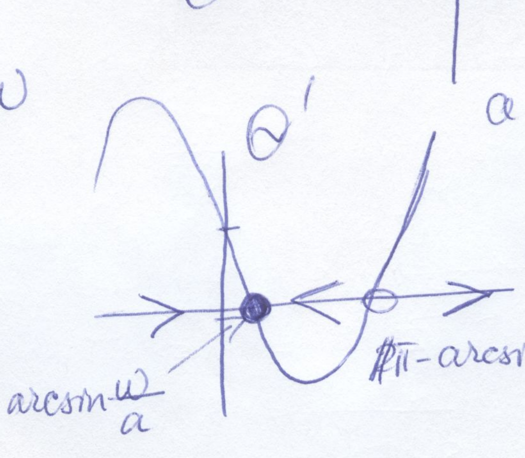
Vektorinis laukas tiesėje



$a < \omega$



$a = \omega$

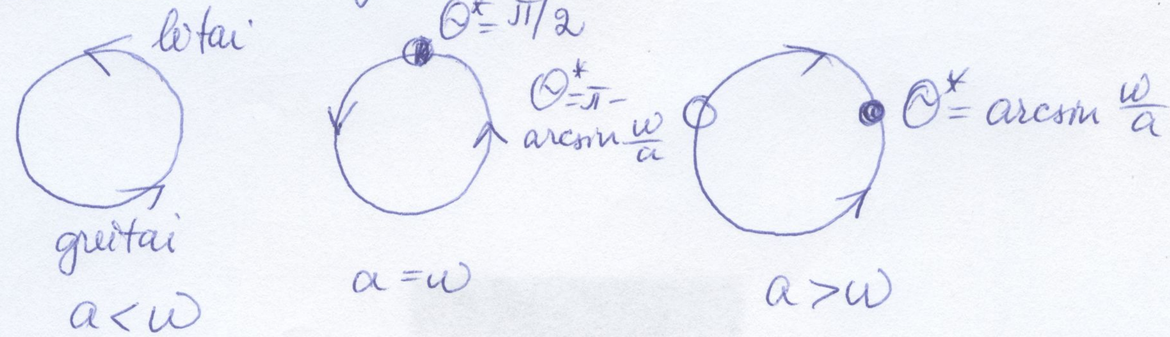


$a > \omega$

$$\omega - a \sin \Theta = 0$$

$$\Theta^* = (-1)^k \arcsin \frac{\omega}{a} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vektorinis laukas apskritime:



Tiesinė stabilumo analizė:

$$f(\theta)=\omega-a\sin\theta, \quad f'(\theta)=-a\cos\theta$$

Kai $\theta^*=\arcsin\frac{\omega}{a}$, tai $f'(\theta^*)<0$ – taškas stabilus.

Kai $\theta^*=\pi-\arcsin\frac{\omega}{a}$, tai $f'(\theta^*)>0$ – taškas nestabilus.

Osciliavimo periodas

Laikas reikalingas θ padidinti per 2π yra osciliavimo periodas, kai $a<\omega$:

$$T=\int dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{d\theta}\,d\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\frac{d\theta}{dt}}=$$

dif. lygtis

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{\omega-a\sin\theta};$$

$u=\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$, $u=-\infty$, kai $\theta=-\pi, 0$
$u=+\infty$, kai $\theta=\pi$.

$$1+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\Rightarrow\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+u^2},\quad \cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2u}{1+u^2};$$

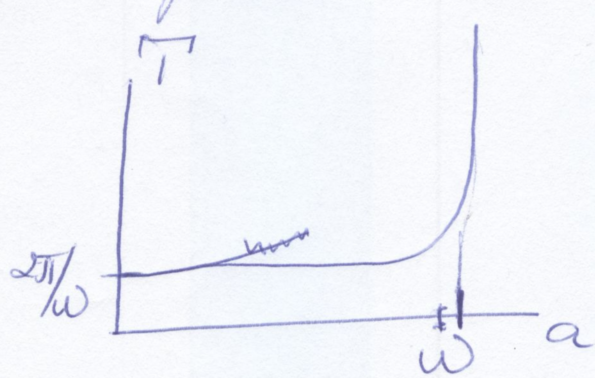
$$du=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}\,d\theta\Rightarrow du=\frac{1+u^2}{2}\,d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{2du}{1+u^2}$$

$$T=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\,du}{\omega(1+u^2)-2ua}=\frac{2}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(u-\frac{a}{\omega}\right)}{\left(u-\frac{a}{\omega}\right)^2+\underbrace{1-\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}_{>0,\ \text{nes } a<\omega}}=$$

$$=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}}\lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}}\operatorname{arctg}\frac{u-\frac{a}{\omega}}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}}\Bigg|_A^B=$$

$$=\frac{2}{\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{\omega}\right)^2}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-a^2}}.$$

Suprantame, kad T priklauso nuo a. Grafike matome tą priklausomybę



Kai $a=0$, tai $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Tai mums žinomas mechaninių svyravimų periodas (tolygusis oscilatorius).

Kai $a\to\omega_-$, tai periodas T didėja ir tampa neaprėžtas, kai $a=\omega$.

Kaip vyksta šis divergavimas?

Pastebėkime, kad

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-a^2}},\ \text{o}$$

$$\omega^2-a^2=(\omega+a)(\omega-a)$$

Tuomet, kai $a\approx\omega$, tai $\omega+a\approx 2\omega$

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{2\omega}\sqrt{\omega-a}}=\pi\sqrt{\frac{2}{\omega}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\omega-a}}$$

Tai rodo, kad sprogimas vyksta kaip $(\omega-a)^{-1/2}$, kai $a_{krit.}=\omega$.