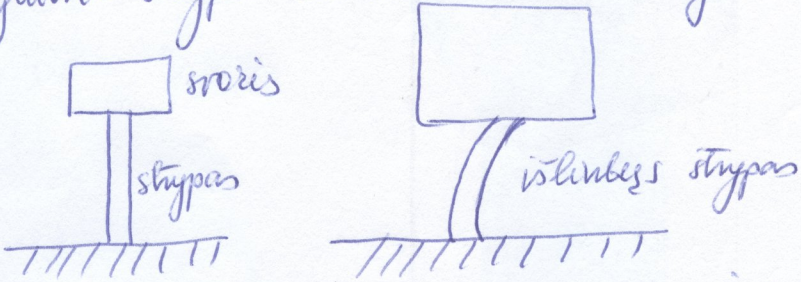


# Bifurkacijos

Pramonės vėles dinaminės sistemos gali atrodyti nesudėtingos, nes kaip mažame suvartojamame dinamika labai paprasta; sprendiniai antroje puse ramybės taško arba tolsta,  $\pm \infty$ . Taip, bet nesudėtinga, jei ne parametras įtakos analizei. Tiekis kokybinė analizė gali būti paliešta keičiant valdantiesiems parametras. Toliau būdai ramybės taškais gali atsinauti arba išnykti arba gali Heng listis taškų stabilumas. Toliau kokybiniai dinaminės polypovai vadinami bifurkacijomis, o parametras vadinamas, kurio keičia vienetis polypovus - bifurkacijos taškais.

Nauguodami tame šly, valdantiesiems parametras, udhsnes mes galime stebėti bifurkacijas.

Salykime stypo išlinkimo uždavinys:



Antroje atreje vertikali stypo pozicija tampa nestabili ir stypas išlinksta. Šiuo atreju svoris uždetas ant stypo yra valdantysis parametras.

Prundausta uaprosime bifurkacijos Heseje. Pradisiame nuo paprasčiausio atreju.

## Baluo-mazgo bifurkacija

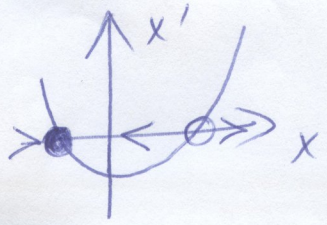
Tai paprindine bifurkacija, kuri gali sukurti arba panaikinti ramybės taškus. Nauguojant parametras du ramybės taškais antroje vietas prie kito, susiduria ir panaikino vietas kito.

Stebėjime paprasčiausią baluo-mazgo bifurkaciję apnatsome pramonės vėles dinaminė sistema:

$$x' = \tau + x^2$$

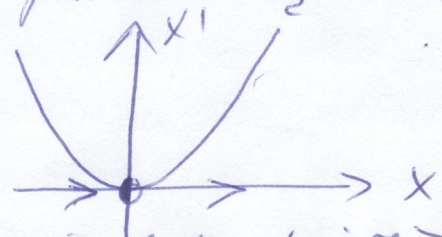
čia  $\tau$  - valdantysis parametras, kuris gali būti  $> 0$ ,  $< 0$  arba  $= 0$ .

1) Kai  $\tau < 0$ , tai turime du ramybės taškus: neug stabilus, o kito - nestabilus.

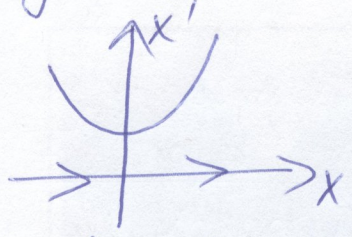




2) Kai  $\tau \Rightarrow 0$ , tai parabolė kyla į viršų ir ramybės taškai artėja vienas prie kito. Kai  $\tau = 0$ , tai ramybės taškai susilieja ir pusiaustabilus taškas  $x^* = 0$ .



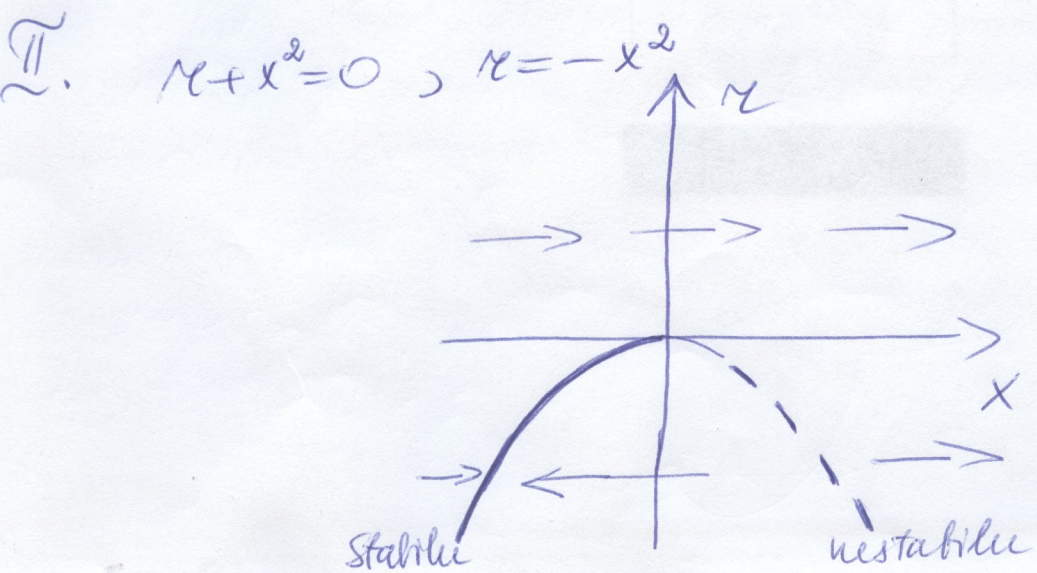
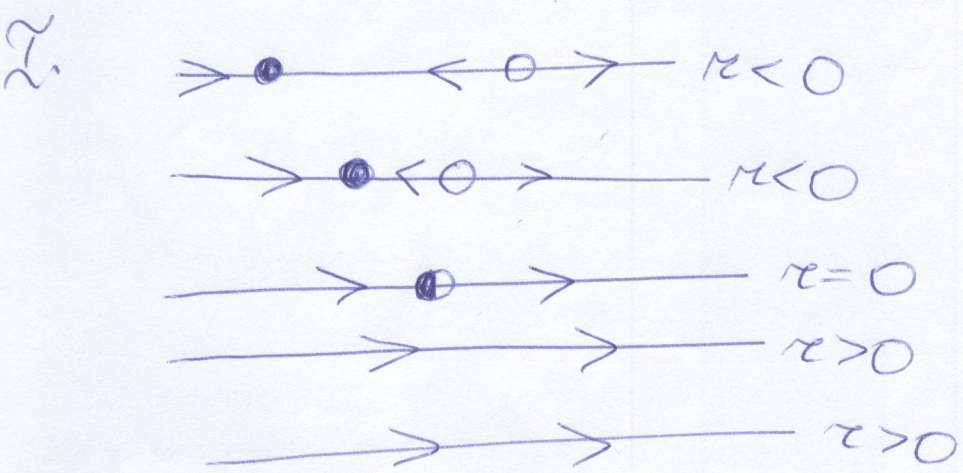
3) Tačiau šis taškas išnyksta, kai  $\tau > 0$ . Šioje situacijoje ramybės taškų nėra.



Šiuo atveju sakome, kad taške  $\tau = 0$  stebime bifurkaciją, nes netoliniai laukai, kai  $\tau < 0$  ir  $\tau > 0$  yra kokybiškai skirtingi.

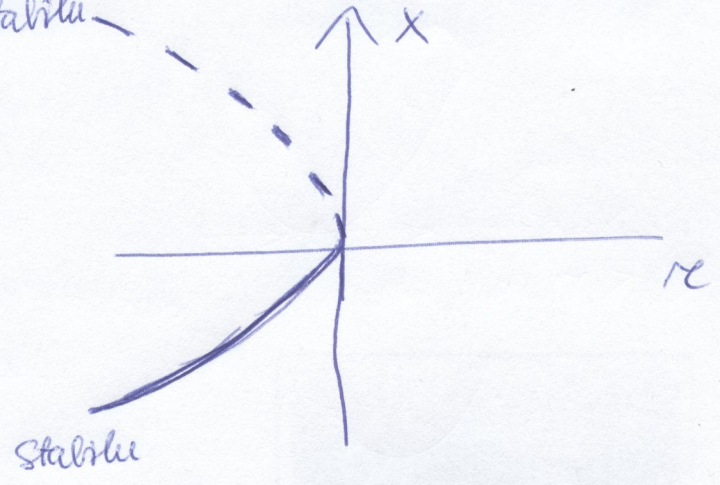
Bifurkacinių diagramų.

Bifurkacijos (balno-mazgo) grafiškai galime parauduoti labai įvairiai.





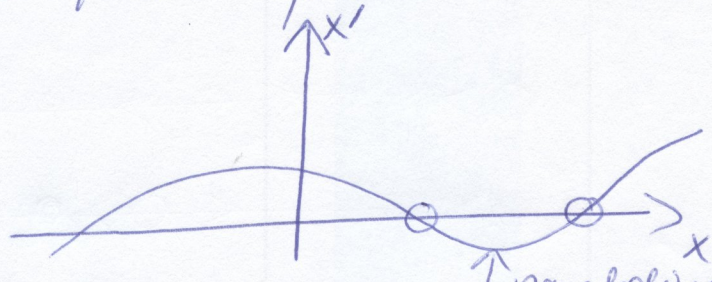
III. Tačiau patogiau nagrinėti balno-mazgo bifurkacijos židiniame grafike ( $\mu = -x^2$  pameiktas)



Ši bifurkacija turi liūtojų paradigmų, tačiau balno-mazgo bifurkacijos paradigmą būdingas autostėmų, esančių dinaminėse sistemose, todėl naudojamas ir kalbant apie pirmuosius esančių dinaminės sistemas.

Balno-mazgo bifurkacijos normaloji forma

Kaip turi elgtis sistema  $x' = f(x)$  ramybės taškai kintant parametrai? Turime du ramybės taškus esančius utoli vienas kito, t.y. lygtis  $f(x) = 0$  sprendiniais. Grafiškai tai atrodo taip:



Kintant parametro  $z$  reikšmei parabolinė dalis kerta  $Ox$  ašį, vėliau  $f$  tiki liečia, o po to - vėliau bendras taškas su  $Ox$  ašimi.

Tarkime, kad  $f(x, z)$ . Tarkime  $f$  ir  $f'$  elgseną arti bifurkacijos taško  $x = x^*$ , kai  $z = z_{krit.}$ . Šio taško aplinkoje  $f$  ir  $f'$  skleidžiame Tayloro eilutę:

$$f(x, z) = f(x^*, z_{krit.}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, z_{krit.})} (x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x^*, z_{krit.})} (z - z_{krit.}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x^*)^2 + \dots$$



Atuotys 2-oro, esis namus pagal 2 ir trečios, esis namus (23)  
 pagal x turime, kad

$$f(x, z) = \frac{\partial f}{\partial z} (z - z_{krit.}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x^*)^2, \text{ nes}$$

$$f(x^*, z_{krit.}) = 0, \quad x^* - \text{ramybės taškas}, 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, z_{krit.})} = 0, \text{ nes } z_{krit.} - \text{taškas kritinis, kuriame išvestinė}$$

lygi 0.

Tad turime

$$x' = \frac{\partial f}{\partial z} (z - z_{krit.}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x^*)^2.$$

Pasymelkime  $\frac{\partial f}{\partial z} = a, 0 \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = b.$

Tuomet

$$\boxed{x' = a(z - z_{krit.}) + b(x - x^*)^2}$$

- normalioji  
 balno - margo  
 bifurkacijos forma.

Ji apmūšia jau nagrinėtą atvejį:

$$x' = z + x^2 \text{ ir taip pat}$$

$$x' = z - x^2.$$

Transkriazine bifurkacija  
 (transkritinė)

Galime situaciją, kai ramybės taškas egzistuoja mūsų laisvą ir  
 meliade nestabili (pvz. logistiniame modelyje, kai su mūsų  
 padidėjusis sąlygoms turime ramybės tašką  $T=0$  (ir su mažia k))  
 Tačiau keičiant valdančiąsias parametrus gali kisti  $H_0$  ramybės  
 taško stabilumas. Tadgi keičiant taško stabilumą mes  
turime transkriazinę bifurkaciją.

Normalioji transkriazinė bifurkacijos forma yra

$$x' = z x - x^2.$$

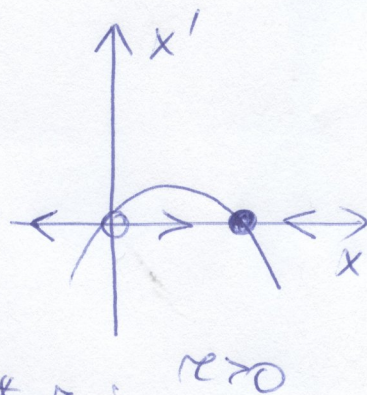
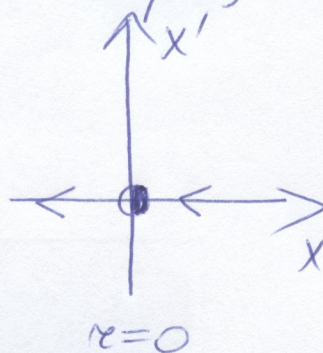
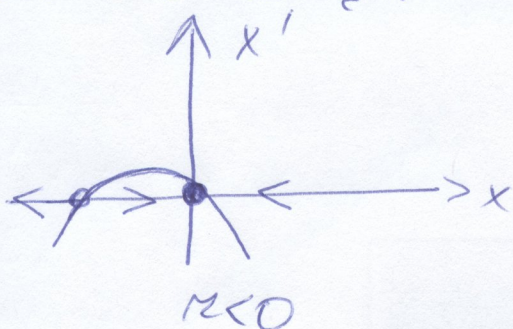
Čia turime dinaminę sistemą, kuri pirmene logistinis lygtis.  
 Tačiau šiuo atveju tiek z, tiek x gali būti tiek teigiami,  
 tiek neigiami.



$$\mu x - x^2 = 0 \Rightarrow x(\mu - x) = 0$$

$x=0$  - ramybės taškas su bet kokia  $\mu$  reikšme.

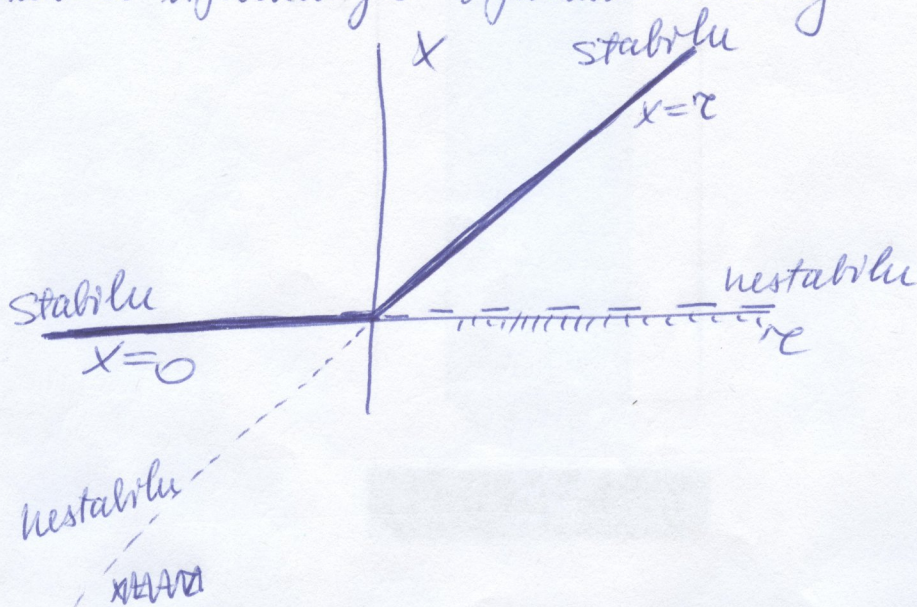
$x=\mu$  taško padėtis priklauso nuo  $\mu$  ženklo. Todėl turime šelį reikšmių laukį (skirtingų atvejai):



Kai  $\mu < 0$  turime nestabilią ramybės tašką  $x^* = \mu$  ir stabilų  $x^* = 0$ . Kai  $\mu$  didėja, tai nestabilusis ramybės taškas artėja prie stabiliojo ir susiduria su juo, kai  $\mu = 0$ . Kai  $\mu > 0$ , tai  $x^* = 0$  tampa nestabilus, o  $x^* = \mu$  - stabilus. Įvyksta stabilumo pakeitimas.

Esminis skirtumas tarp balno - mazgo ir transkuzinio bifurkacijos yra tas, kad šio atveju ramybės taškai neįvyksta po bifurkacijos palvuta tik šį taškų stabilumas.

Transkuzinės bifurkacijos bifurkacini diagramė:



Pr.: Parodyti, kad pirmosios eilės dinaminė sistema

$$x' = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})$$

turi transkuzinę bifurkaciją, kai  $x=0$  esant tam tikroms parametrams  $a$  ir  $b$  reikšmėms.



Kadangi  $x=0$  turi būti raunytas taisyklas, tai

masoms  $x$  šiek tiek Tیلoro  $\varphi$ -le  $f(x)$

$$1 - e^{-bx} = 1 - \left(1 - b \cdot x + \frac{1}{2} b^2 x^2 + O(x^3)\right) =$$

$$= bx - \frac{1}{2} b^2 x^2 + O(x^3)$$

tuomet

$$x' = x - x^3 - a(1 - e^{-bx})$$

$$x' = x - a(bx - \frac{1}{2} b^2 x^2) + O(x^3)$$

$$x' = (1 - ab)x + \frac{1}{2} ab^2 x^2 + O(x^3)$$

transkripcinė bifurkacija bus stebima, kai  $1 - ab = 0$ , t.y. kai  $ab = 1$ .

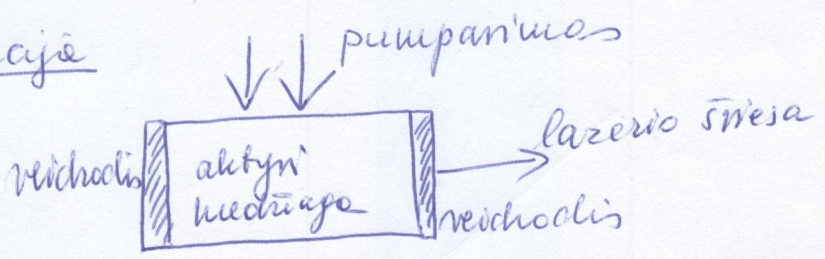
$$(1 - ab)x + \frac{1}{2} ab^2 x^2 = 0$$

$$x^* = \frac{2(ab - 1)}{ab^2}$$

Formulė tinka masoms  $x$  reikšmėms, kai  $ab \neq 1$ .

### Lazerio modelis

Fizikinė situacija



Veidrodžiai yra dalinai reflektuojantys. Naudojame šonius 'Tallius', t.y. naudojame pumpavimą, kad susidarytume aktyvioje medžiagoje esančius atomus. Jei pumpavimas yra lėtas, tai susiduria atomai osciliuoja nepilnai sukuriant šiek tiek šviesos bangas. Jei padidiname pumpavimo tempą, tai pradėsime matyti nepakaita, tačiau ilgai, kai pumpavimo tempas panašus tam tikrai ribai, atomai osciliuoja to paties fazės ir lempa parista lazeriu. Situacijoje visi atomai veikia kaip vienas mechanizmas ir generuoja daug stipresnį ir intensyvesnį spindulį. Tai susiję dėl atomų tarpusavio sąveikos.



Naivusisne supaprastinto modelis. Stebime fotonus  $n(t)$  dinamika

$$n' = \text{augimas} - \text{mažėjimas}$$

$$n' = G n N - k n$$

Augimas nlysta dėl stimuliacijos: fotonai stimuliuoja susidintus atomus skilinti fotonus. Kadangi augimas +sllypoja fotonai  $n$  susidinti atomai  $N(t)$ , tai augimas galime išrašyti

$$G n N, G > 0 - \text{augimo konstanta.}$$

Mažėjimo narys stafamas su fotonus "išėjimu" per lazerio lūštus,  $k > 0$ . Tuo pat dydis  $\tau = \frac{1}{k}$  nurodo fotono gyvavimo lazyme laseryje laiks.

Kadangi susidintas atomas išlygės fotonus tampa jau nebe susidintu, tai  $N(t)$  mažėja pilyausomai nuo fotonus emisijos.

Sei prapnuodami mes susidincime  $N_0$  atomus, tai veltau iš shaitvus masės:  $N(t) = N_0 - \alpha n$ ,  $\alpha > 0$  atomus gyvavimo laiks pading būsenų greitis.

Tuo pat

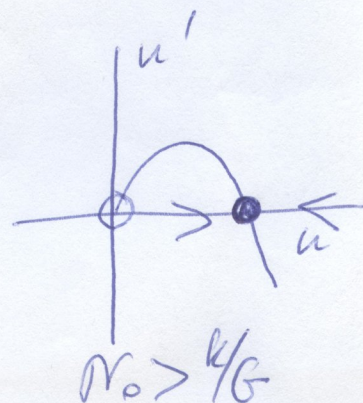
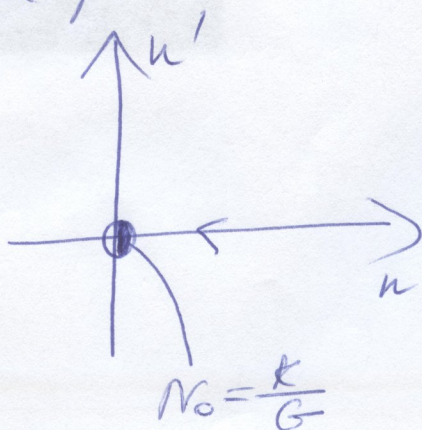
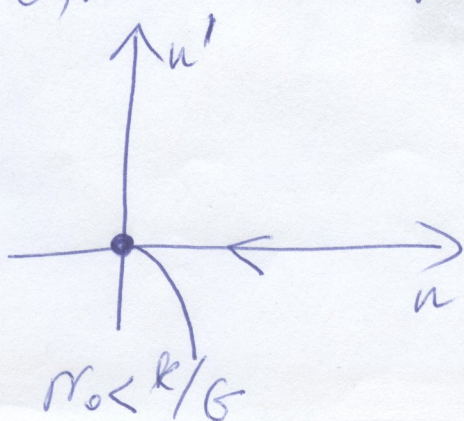
$$n' = G n (N_0 - \alpha n) - k n \text{ arba}$$

$$n' = (G N_0 - k) n - \alpha G n^2$$

Garome pirmosios eilės dinaminiame sistemoje. Naguvelime šios dinaminės sistemos vektorius laukis:

Čia valdantysis parametras  $N_0$ :  $G N_0 - k = 0 \Rightarrow N_0 = \frac{k}{G}$

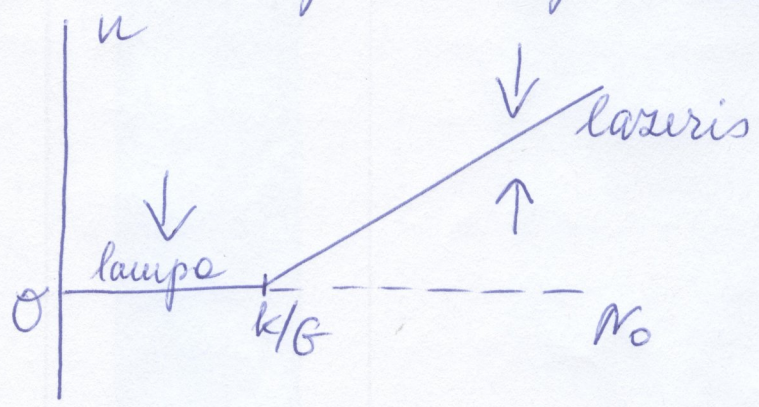
Pereinant iš vienos stebime transkurizius bifurkacijos tashas  $n > 0$ , nes turime fedingis problemais.





Kai  $N_0 < k/G$  turime neigiamą stabilų tašką  $n^* = 0$ , t.y. nėra stimuliuojama fotony emisija ir lazeris veikia kaip lemputė. Kai pumpuojame smarkiau ir padidiname  $N_0$ , tai sistemoje pasireiškia histeretizacija bifurkacijoje  $N_0 = k/G$  ir taškas  $n^* = 0$  praranda stabilumą. Stabilusis taškas taškais  $n^* = \frac{GN_0 - k}{\alpha G} > 0$  ir turime lazerį.

Taškas  $N_0 = k/G$  gali būti svarbijamas kaip lazerio riba.



Pitėporio bifurkacijos

Jo siejamos su smectija. Pavyzdžiui, stypas, ant kurio uždėdama svoris gali išsilygti tiek į vienus, tiek į duos pusrus. T.y. daugelis fizikinių problemų turi erdvinę smectiją.

Yra išskiriamos dvi rūšys Pitėporio bifurkacijos: superkritinė ir subkritinė.

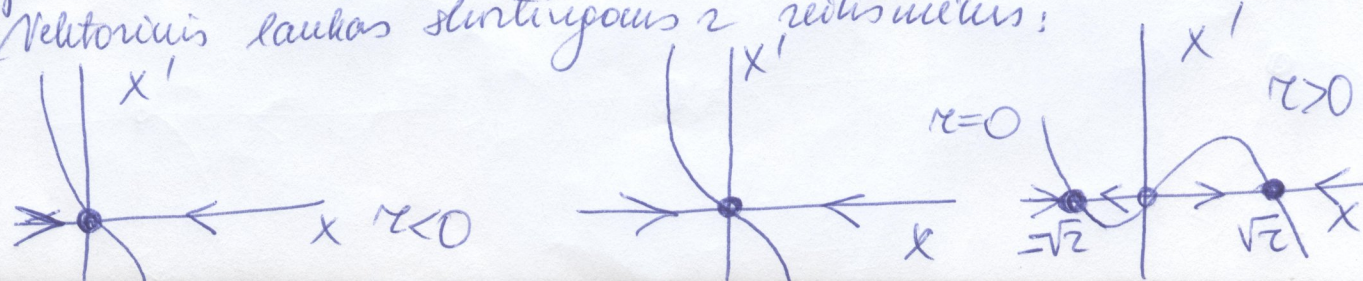
1. Superkritinė bifurkacija

Normalioji šio bifurkacijos forma yra

$$x' = \tau x - x^3$$

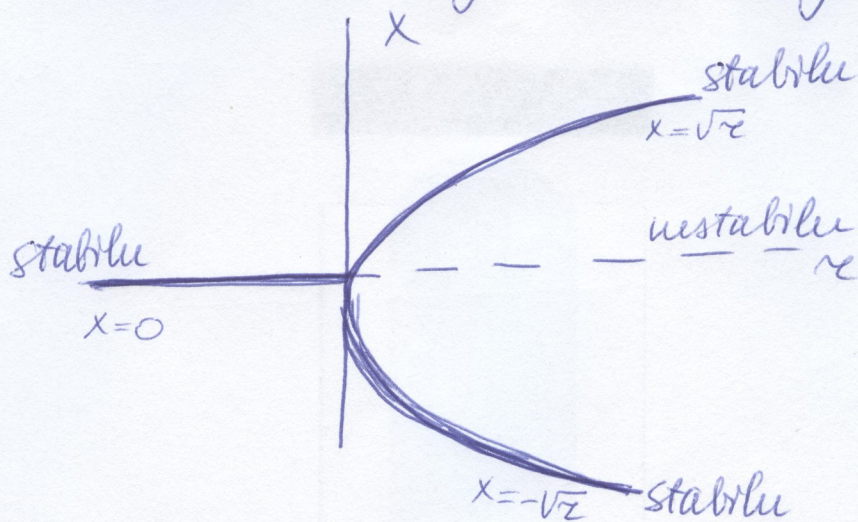
Jei šioje formoje pakeisime  $x \rightarrow -x$ , tai po pakeitimo vėl gausime jne to paties normalinio formos, kas ir rodo situacijos simetriškumą.

Atskleidus laukas slenčių ir 2 reikšmėmis:





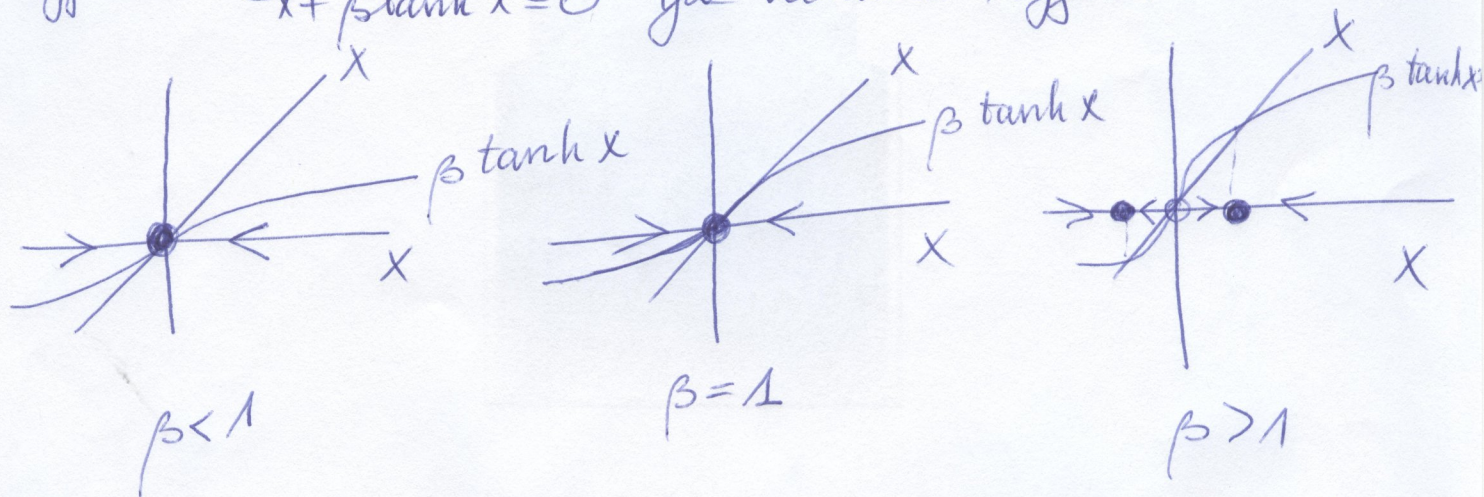
Kai  $\tau < 0$ , tai turime vieną ramybės tašką  $x^* = 0$ , kuris yra (28) stabilus. Kai  $\tau = 0$ , tas pats ramybės taškas  $x^* = 0$  yra marginai stabilus, nes  $f'$  mažėja. Kai  $\tau > 0$ , tai  $x^* = 0$  tampa nestabilus ir atsiranda du nauji stabilūs ramybės taškai:  $x^* = \pm\sqrt{\tau}$ .



Prz.: Statistinėse mechanikos modeliuose susikame lygtis  $x' = -x + \beta \tanh x$  (magnetų modeliai, neuroniniai tinklai)

Parodyti, kad ši sistema turi potėpio bifurkaciją, kai kinta  $\beta$ .

Noridami nustatyti ramybės taškus brėžiame du grafinius, nes lygtis  $-x + \beta \tanh x = 0$  yra netiesinė lygtis.



Brėžę grafinius  $y = x$  ir  $y = \beta \tanh x$  nustatome, kad visuomet bus ramybės taškas  $x^* = 0$ .

Kai  $\beta < 1$ , tai turime tik vieną ramybės tašką, kuris yra stabilus. Kai  $\beta = 1$ , o  $x^* = 0$ , tai šis taškas didėjant  $\beta$  praranda stabilumą ir atsiranda 2 nauji stabilūs taškai, Stebime Potėpio bifurkaciją.

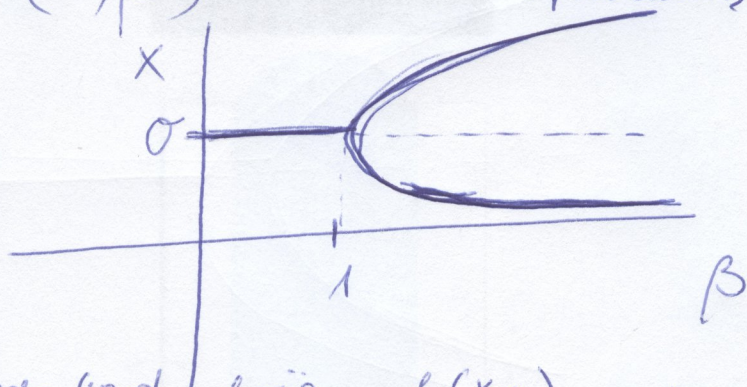


Noridami surasti tuo du raičių vaizdus turime spėti (29) ukturų lygtis:

$$x^* = \beta \tanh x^*$$

Tačiau galime gauti ir taip:  $\beta = \frac{x^*}{\tanh x^*}$

ir surasti poras  $(x^*, \beta)$  bei nubraižyti bifurkacijos diagramą.



Šis pavyzdys rodo, kad  $f$  je  $f(x, \beta) = -x + \beta \tanh x$  masiau (silpniau) priklausomumo nuo  $\beta$  nei nuo  $x$ , taip yra dažnai su bifurkacijos problemomis; priklausomybė nuo parametro yra silpniau nei nuo  $x$ .

## 2. Subkritinė bifurkacija.

Superkritinės bifurkacijos atveju mes turime kubinį narį, kuris atlieka stabilizavimo vaidmenį, t.y. veikia kaip grąžinančią jėgą nubrėžiant  $x(t)$ ;  $x=0$ .

Tuo atveju, kai kubinis narys destabilizuoja situaciją mes nagrinėjame subkritinę bifurkaciją. Normalioji dinaminė sistema šiuo atveju yra:

$$x' = \tau x + x^3$$

Detaliau šią dinaminę sistemą išsime palitinio vėdinimo metu (3 uždavinys Pratybos Nr. 2).

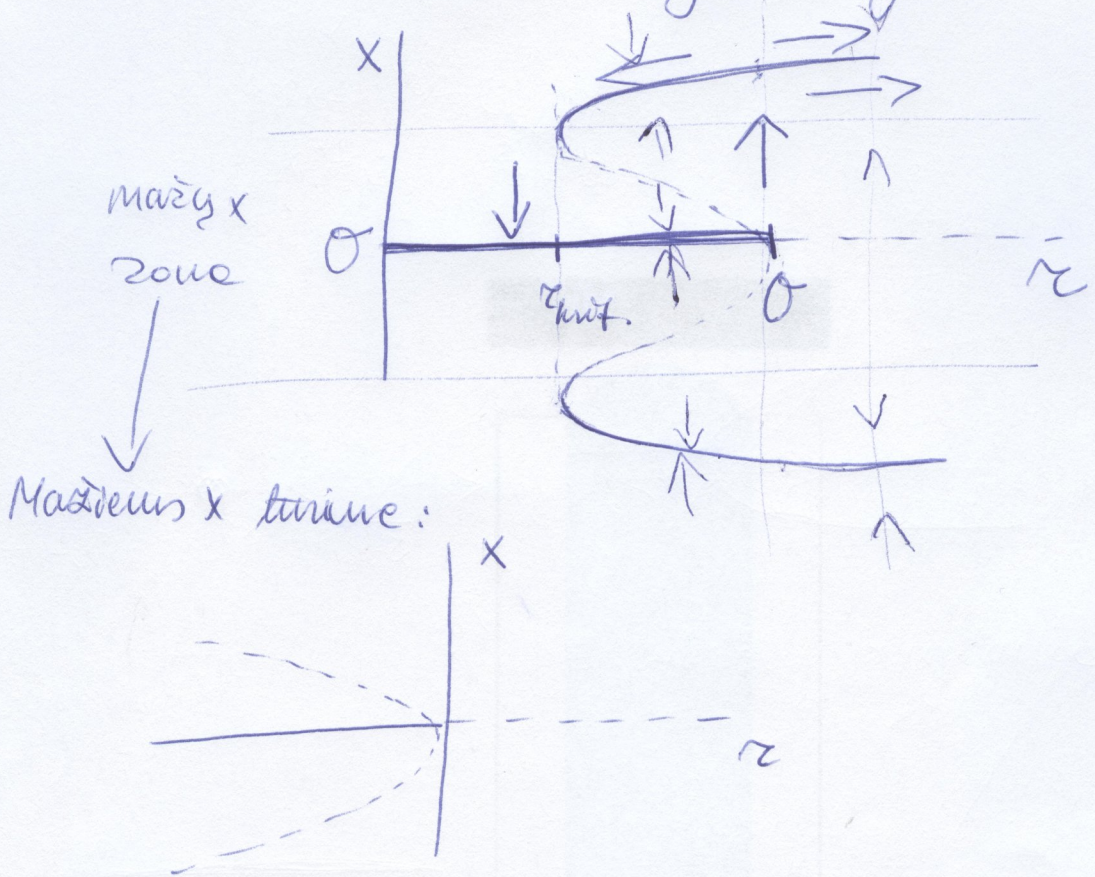
$x^* = 0$  stabili bifurkacija, kai  $\tau \geq 0$ , tačiau dėl kitų pavyzdžių nestabiliu srovai autiškesnių edis nariai (astuviniai daiktai struktūrinio smylio). Tais pavyzdiais stabilizacijos narys mūsų nagrinėjamai dinaminei sistemai būtų  $x^5$ .

Tuomet sistema su subkritine piterko bifurkacija

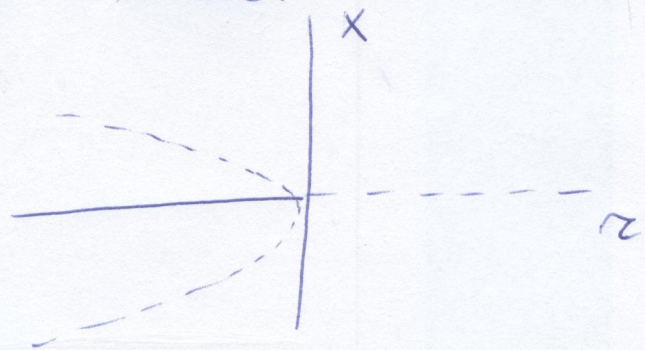
$$x' = \tau x + x^3 - x^5.$$



Šios sistemos bifurkacinė diagrama yra



Maksimalus  $x$  turime:



$x^5$  nario stabilus yra  $z_0$ , kad nestabilios šakos apima  $z_0$  ir tampa stabilios, kai  $z = z_{krit.}$ ,  $z_{krit.} < 0$ . Toliau stabilios šakos egzistuoja mūsų reikšmėms  $z > z_{krit.}$

1) Kai  $z_{krit.} < z < 0$ , tai turime  $x^* = 0$  ir du ramybės taškus stabilioje šakoje. Pradinė sąlyga  $x_0$  nustato, kuri stabili situacija pasireikš. Taip pat turime ir du nestabilius ramybės taškus. Taškas  $x^* = 0$  yra tik lokaliai stabilus.

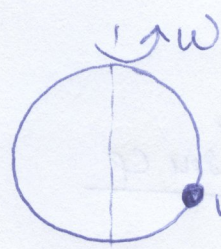
2) Daugelio stabiliosios taškų būna sukelta suolis ir histerezis galimybės, kai kinta valdantysis parametras  $z$ .  
 Jei mes pradėdami analizę taške  $x^* = 0$  ir po truputį didiname parametro  $z$  reikšmę, tai taškas  $x^* = 0$  išlieka stabilus iki  $z = 0$ , o ten praranda stabilumą. Jis tampa nežinoma, protūnis gali sukelti suolį ir neigiamą stabilumo šalį. Jei ir toliau didiname  $z$ , tai išliekame toje pačioje stabilioje būsenoje. Jei suomet pradėdami mažinti  $z$ , tai išliekame stabilioje šakoje kol nepasiekime  $z = 0$ , tačiau, kai pasiekime  $z_{krit.}$ , tai persikame į  $x^* = 0$ .  
 Šis apgyziamumas kintant parametrai  $z$  vadinamas histerese.



3) Krit. taške skubme balno-mazgo bifurkacija, kurioje "wėgnusta" n-melur" nauji raiybe's tashai (stabilūs ir nestabilūs).

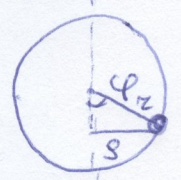
Superkritinė bifurkacija kartais radiuame saugta az minkšta, nes nauji raiybe's tashai atsiranda su maža amplitude. Tuo tarpu subkritinė bifurkacija yra kietas ar paropupa, nes atsiranda tuchis nuo 0 iki didelės amplitude's.

Lieklas aut bėrsuhanėro lanku



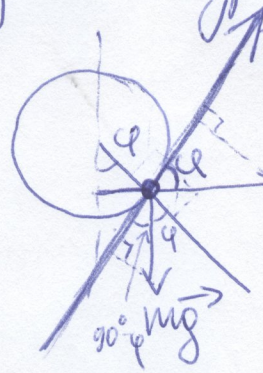
(kavolėukas) Aut lanku rėvertas, kavolėukas, kuris slidinauja bėrsuhanėiu lanku. Laukas suhan pastoru kavymiu (m mases) guėiu apne savo vertikaliybe's aėė.

Lėikant, kad kavolėuko rėdėta gravitacini ir vėcentrine jėgė, tėsrime kavolėuko judėjimuė. Tap pat strėukime ir trintėis jėgė, kuri pėrsinasi judėjimuė. Salykime, kad uogėruėmėguė sisteme patalpėta melaso kontėinereje (galime ir kėtoje labai klėmpioje aplėrėoje).



Salykime, kad kavolėuko sudaromas kavpas su vertikaliybe aėėiai lygus phi, 0 < phi <= pi. Tuomet s = r sin phi.

Remiantis autogėru Mėntono dėsėnu raėėime kavolėuko judėjimuė dif. lygtė. Sėukio jėgė = mg, vėcentrine jėgė = m v^2 / s, o v = omega \* s, tai F\_{vėc.} = m g omega^2, o trintėis jėgė proporėinge kavpo kėtrėmo guėėiu, t.y. F\_{tr.} = b \* phi', b > 0. Kadaugi lankas uėre lankstus, tai tėrime judėjimuė tok tangėntine kryptimi (liėstiniė kryptimi)



$F_{s.pig.} = -mg \cos(90^\circ - \phi) = mg \sin \phi$

$F_{vėc.p.} = mg \omega^2 \cos \phi$

Tuomet kavpo kėtrėmo pagėėtis yra phi'' ir judėjimuė dif. lygtis:

$m \phi'' \cdot r = -b \phi' - mg \sin \phi + mg \omega^2 \cos \phi$

Gerime antrosios eilės dif. lygtis.



Magrinchiame atrejs, kai trintis jeiga yra labai dideli  
lygtumai su karoliuko mase ir toliu atreju

$$m \approx \rho'' \sim 0$$

Magrinčiame pirmosios eilės dinaminini sisteme:

$$b \varphi' = -mg \sin \varphi + m g \omega^2 \cos \varphi$$

$$b \varphi' = m g \sin \varphi \left( \frac{\omega^2}{g} \cos \varphi - 1 \right)$$

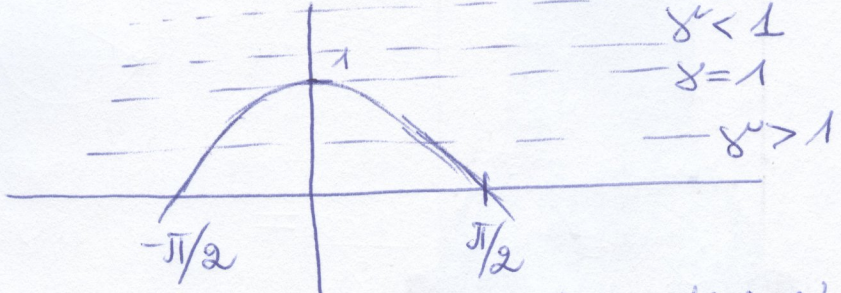
Kaunybės taškai yra lemiami  $\sin \varphi = 0$ , t.y.

Šiuose taškuose karoliukas uždula.  $\left. \begin{matrix} \varphi^* = 0 \\ \text{(lanke} \\ \text{apacia)} \end{matrix} \right\} \varphi^* = \pi$   $\left. \begin{matrix} \varphi^* = \pi \\ \text{(lanke} \\ \text{mšus)} \end{matrix} \right\}$

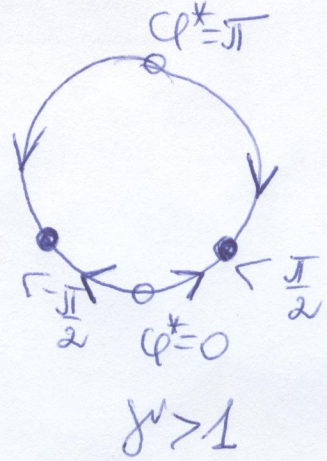
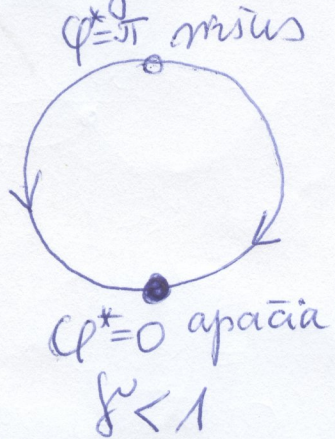
Kiti raunybės taškai:

$$\frac{\omega^2}{g} \cos \varphi - 1 = 0 \Rightarrow \varphi^* = \arccos \frac{g}{\omega^2}$$

Pažymime  $\gamma = \frac{\omega^2}{g}$  ir sprendžiame uktiesmų lygtį  
 $\cos \varphi^* = \frac{1}{\gamma}$  grafiškai.



Matome 3 skirtingas situacijas. Kai  $\gamma < 1$ , tai sp. uere;  
kai  $\gamma = 1$ , tai turime  $\varphi^* = 0$ , o kai  $\gamma > 1$ , tai turime dar  
du papildomus raunybės taškus, kurie yra simetriškai išsidėstę  
 $\varphi^* = 0$  atžvelgus. Kai  $\varphi \neq \gamma \rightarrow \infty$ , tai  $\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ .



su kvestime  $f$  funkcijos tiriamas taškų stabilumas