$$\eta' = \eta\, f'(x^*)$$, kuri yra tiesinė η atžvilgiu.

Tai – <u>linearizacija ramybės taško x^* aplinkoje.</u>

Iš jos matyti, kad

$$\eta = C e^{f'(x^*)t}, \text{ t.y.}$$

kai $f'(x^*) > 0$, $\eta(t)$ eksponentiškai auga, o kai $f'(x^*) < 0$, $\eta(t)$ eksponentiškai mažėja.

Tuo atveju, kai $f'(x^*) = 0$, tai turime tirti aukštesnės eilės narius, t.y. negalime atmesti $O(\eta^2)$. Stabilumo tyrimui tenka naudoti netiesinę analizę.

Kaip matome, kad taško stabilumą nulemia išvestinės ženklas ramybės taške, t.y. $f'(x^*)$. <u>Jei $f'(x^*) < 0$, tai x^* – stabilus.</u>

<u>Pvz.:</u> Panagrinėkime ankstesnius pavyzdžius:

1) $x' = \sin x$

$f(x) = \sin x$. Ramybės taškai $x^* = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$f'(x) = \cos x$

taškuose $x^* = \pi 2l,\ l \in \mathbb{Z}$ $f'(x^*) > 0$, o

taškuose $x^* = \pi(2l+1),\ l \in \mathbb{Z}$ $f'(x^*) < 0$ (stabilūs taškai)

Taip ir turėjome

2) $x' = 4x^2 - 16$

$f(x) = 4x^2 - 16$

Ramybės taškai $x^* = \pm 2$

$f'(x) = 8x$ taške $x^* = 2$, $f'(x^*) > 0$, o taške $x^* = -2$, $f'(x^*) < 0$ – stabilus.

Analogiški rezultatai ir kituose pavyzdžiuose (modeliuojant procesą el. grandinėje arba populiacijos dinamikos modelyje).

Pvz.: 3) El. grandinėje

$$q' = \frac{\mathcal{E}_0}{R} - \frac{1}{RC} q$$

$$f(q) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} - \frac{1}{RC} q \quad , \quad q^* = \mathcal{E}_0 \cdot C$$

$$f'(q) = -\frac{1}{RC} < 0 \text{ , tai } q^* \text{ - stabilus.}$$

4) populiacijos dinamikos modelis

$$P' = \frac{k}{K}(PK - P^2)$$

$$f(P) = \frac{k}{K}(PK - P^2) \quad , \quad P^* = 0 \, , \; P^* = K$$

$$f'(P) = \frac{k}{K}(K - 2P)$$

$P^* = 0$, $f'(P^*) > 0$ - nestabilus, o

$P^* = K$, $f'(P^*) < 0$ - stabilus.

Kiek stabilus yra ramybės taškas? Tai lemia $f'(x^*)$ didumas taške. Dydis $\tau = \frac{1}{|f'(x^*)|}$ yra charakteristinis laikoskalė (fliuktuacijos gesimo arba augimo laikas), t.y. laikas kuriuo $x(t)$ kinta ramybės taško x^* aplinkoje. Kuo mažesnis τ, tuo greičiau taškas artėja (tolsta) nuo ramybės taško.

Pvz.: 1) pvz. $\frac{1}{|f'(x^*)|} = 1$

2) pvz. $\frac{1}{|f'(x^*)|} = \frac{1}{16}$

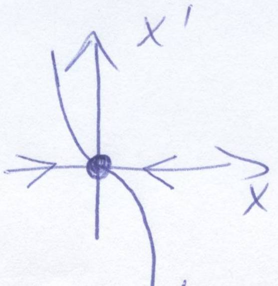
3) pvz. $\frac{1}{|f'(x^*)|} = |RC|$

4) pvz. $\frac{1}{|f'(x^*)|} = \frac{1}{k}$

Dabar panagrinėkime pavyzdžius, kuriuose $f'(x^*)=0$.

Pvz.: 1) $x'=-x^3$

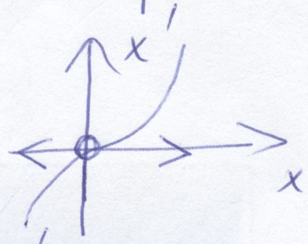
$x^*=0$



atraktorius
stabilus

2) $x'=x^3$

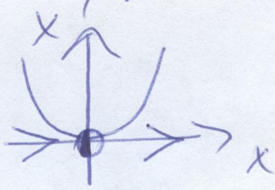
$x^*=0$



repeleris
nestabilus

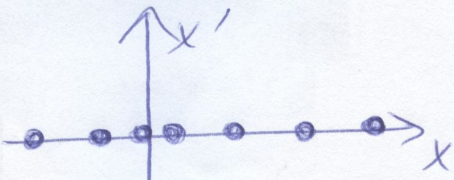
3) $x'=x^2$

$x^*=0$



šuntas
pusiau stabilus

4) $x'=0$



ramybės taškai —
visa Ox ašis.

Atrodytų, kad šios situacijos yra dirbtinės, tačiau jos natūraliai atsiranda bifurkacijų metu.

Sprendinio egzistavimas ir vienatis

Teorema. Jei pradinio uždavinio $x'=f(x)$, $x(0)=x_0$ dešinės pusės f-ja $f(x)$ kartu su savo išvestine $f'(x)$ yra tolydžios x ašies atkarpoje (intervale atvirame) R, o $x_0 \in R$, tai tuomet pradinis uždavinys laiko intervale $(-\tau,\tau)$ arti $t=0$ turi vienintelį sprendinį $x(t)$.

Mes nagrinėsime tik tokius atvejus, kai sprendinys egzistuoja ir yra vienintelis.

Pvz.: kai pažeistos teoremos sąlygos vienatinumo mes negalime tvirtinti $x'=x^{1/3}$, $x_0=0$.

$x^*=0$ – ramybės taškas, kuriame $x=0$ visada, t. y. turime sprendinį $x(t)=0$,

Kita vertus, integruodami dif. lygtį randame sprendinį:

$$\frac{3}{2}x^{2/3}=t+C \Rightarrow C=0, \text{ o } x=\left(\frac{2}{3}t\right)^{2/3} \text{ – sprendinys.}$$

Sprendinys nėra vienintelis.

Taip nutiko, nes $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ taške $x=0$ nėra tolydi.

Tuomet neaišku, kaip turi elgtis ramybės taške judantis fazinis taškas: likti jame, ar judėti?

Kitas pvz. iliustruoja situaciją, kai sprendinys egzistuoja tik trumpą laiką τ arti $t=0$.

Pvz.: $x' = 1 + x^2$, $x(0) = x_0$, $x_0 = 0$

$f(x)$ ir $f'(x)$ – tolydžios

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dt$$

$$\operatorname{arctg} x = t + C$$

$$\operatorname{arctg} 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\operatorname{arctg} x = t \Rightarrow \underline{x = \operatorname{tg} t}$$

Tačiau sprendinys egzistuoja tik, kai $-\pi/2 < t < \pi/2$.

Kai $t \Rightarrow \mp \frac{\pi}{2}$, tai $x(t) \Rightarrow \pm\infty$.

Šiuo atveju sprendinys yra begalinis po baigtinio laiko! Ši situacija vadinama sprogimu. Demografinio sprogimo pavyzdys

$\boxed{\text{MATLAB} \quad \text{DS\_paskaita\_3pav.m}}$.

Apibendrindami galime pasakyti, kad pirmosios eilės dinaminėse sistemose pagrindinis vaidmuo tenka ramybės taškams. Tačiau bet kuriuo atveju čia neliekа vietos periodinių sprendinių osciliacijoms, t.y. kai tikrame taške pasidėjęs judėjimas į tą tašką niekada nesugrįžta. T.y. nėra periodinių dif. lygties $x' = f(x)$ sprendinių.

Skaitiniai metodai, taikomi pirmosios eilės dinaminėms sistemoms

$x_{i+1} = x_i + f(x_i) \cdot \tau$ – Eulerio metodas (išreikštinis)

Kokių svarbių konstantų gauname atkarpoje [0,1] spręsdami dif. uždavinį $x' = x,\ x(0) = 1$? $f = (t, x)\,x$, $\tau = 0{,}1$

MATLAB tikslus ir Eulerio met. euler-i ir MATLAB komandų sprendiniai lauko ir absolir

Neišreikštinis Eulerio metodas, simetrinis Eulerio metodas ir galėjo turėti išreikštinį antrosios tikslumo eilės metodą. Taip atsiranda prediktoriaus-korektoriaus schema ir Rungės-Kutos formulės.

Neišreikštinis Eulerio metodas:

$$x_{i+1} = x_i + f(x_{i+1}) \cdot \tau$$

Išreikštinis neišreikštinis Eulerio metodai yra pirmosios tikslumo eilės. Jie rekomenduojami taikyti sprendžiant uždavinius.

Simetrinis Eulerio metodas

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2}\tau\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$ yra antrosios tikslumo eilės.

Jis-neišreikštinis.

Tuo tarpu prediktoriaus-korektoriaus metodas yra išreikštinis antrosios tikslumo eilės metodas:

$$K_1 = f(x_i)$$
$$K_2 = f(x_i + \tau K_1)$$
$$x_{i+1} = x_i + \frac{\tau}{2}(K_1 + K_2)$$

Tai-dviejų žingsnių metodas. Galima sudaryti ir kitokių daugiažingsnių išreikštinių metodų (Rungės-Kutos), tačiau metodų tikslumas taip sparčiai neauga kaip žingsnių skaičius (tuo pačiu ir skaičiavimų apimtys).

Etapų skaičius	m	1	2	3	4	5	6	7	8
Tikslumo eilė	p	1	2	3	4	4	5	6	6

Todėl dažniausiai taikomi trijų arba keturių žingsnių Rungės-Kutos metodai.

$m = 3$:

$$K_1 = f(x_i),$$
$$K_2 = f\left(x_i + \tau \cdot \tfrac{1}{2}K_1\right),$$
$$K_3 = f\left(x_i + \tau(-K_1 + 2K_2)\right)$$
$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}\cdot\tau(K_1 + 4K_2 + K_3)$$

$m = 4$:

$$K_1 = f(x_i)$$
$$K_2 = f\left(x_i + \tau \cdot \tfrac{1}{2}K_1\right),$$
$$K_3 = f\left(x_i + \tau \cdot \tfrac{1}{2}K_2\right),$$
$$K_4 = f(x_i + \tau \cdot K_3)$$
$$x_{i+1} = x_i + \frac{\tau}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Kodėl nepavirtinsime sistemos atrėjams mažo τ. Tai leistų tai, kad susiduriame su apvalinimo paklaidomis, nes kompiuteriai skaičiuoja tam tikru tikslumu ir dydžių neskiria, jei jie skiriasi tik tam tikru labai mažu dydžiu δ.

Vienetų eilės skaičiams $\delta = 10^{-7}$ for single precision ir $\delta = 10^{-16}$ for double precision. Jei pavirtinsime per mažą τ, tai paklaidos kaupsis ir tai iškreips rezultatus.

MATLAB'e sprendiniai su Eulerio, neišr. Eulerio euler-n ir MATLAB komand. R-K metodais ir lygčių rk3 ir rk4 ir komand. lygčių tikslus spr. dsolve

Dif. lygčių dinamikai tirti yra sukurtos ir specialios programos, pr. Phaser (Kocak 1989) for the IBM PC.